Chapitre 2

Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Dans ce deuxième chapitre, on présente rapidement la notion de norme sur un espace vectoriel : cela nous permettra de revoir les principales propriétés des suites convergentes dans un cadre plus général. D'ailleurs, on verra quelques exemples fondamentaux de normes, avant d'aborder les cas particulier de $\mathbb{R}$ et des espaces vectoriels normés de dimension finie.

Programmes 2022

Pour aller plus loin

Ce chapitre n'est pas difficile, puisqu'il reprend au fond les principaux résultats de première année, mais l'objectif est de comprendre comment, au travers des démonstrations, on manipule ces normes. C'est d'ailleurs un premier pas vers le chapitre de topologie qui sera abordé plus tard.

Les espaces vectoriels considérés ici sont réels ou complexes et $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Normes et espaces vectoriels normés

1.1 Premières définitions

Définition Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- On appelle **norme** sur E toute application $\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in E,\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \text{ (séparation)} \\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \ \text{ (homogénéité)} \\ \forall (x, y) \in E^2,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \text{ (inégalité triangulaire)} \end{cases}$$

- Dans ce cas, E muni de la norme $\|.\|$ est appelé **espace vectoriel normé**.

Remarques

1. Une telle norme sur un espace vectoriel nous permet en fait de définir une **distance** et donc, de prolonger naturellement nos problèmes d'analyse asymptotique : convergence, divergence, limite... et ainsi, pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\|x - y\| \text{ désigne tout simplement la distance entre } x \text{ et } y$$

2. Pour la séparation, on se contentera de ne vérifier que le sens direct puisque le sens réciproque est immédiat par homogénéité.

Définition Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

- On dit que $x \in E$ est **unitaire** ou **normé** si $\|x\| = 1$.
- Plus généralement, si $x \neq 0$, alors $\dfrac{1}{\|x\|}x$ désigne **l'unique vecteur unitaire associé** à x.

Propriété 1 (inégalités triangulaires)**.**

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Alors, on a pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

► *On travaille en deux temps : l'inégalité triangulaire classique découle immédiatement des propriétés de la norme. Pour l'inégalité triangulaire inversée, il suffit de partir de la norme de l'un et d'ajouter $\pm$ le suivant.*

En effet, on a par exemple :

$$\|x\| = \|x + y - y\| \leq \|x + y\| + \|-y\| = \|x + y\| + \|y\|$$

et ainsi, $\|x\| - \|y\| \leq \|x + y\|$. De la même façon, en partant de y, il vient $\|y\| - \|x\| \leq \|x + y\|$ de sorte que :

$$\pm(\|x\| - \|y\|) \leq \|x + y\| \Rightarrow |\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\|$$

Propriété 2 (deux exemples à connaître)**.**

1. Dans $\mathbb{R}$, on rappelle qu'on définit la **valeur absolue** d'un nombre réel x par :

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{sinon} \end{cases}$$

de sorte que $(\mathbb{R}, |.|)$ désigne un **espace vectoriel normé**.

2. Dans $\mathbb{C}$, on rappelle qu'on définit le **module** d'un nombre complexe z par :

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}$$

de sorte que $(\mathbb{C}, |.|)$ désigne un **espace vectoriel normé**.

► *On revient à la définition d'une norme sur un espace vectoriel. Dans les deux cas, les premières propriétés sont immédiates. Seule l'inégalité triangulaire nécessite d'être développée et pour cela, on travaille avec la norme au carré :*

1. *Pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x||y| + y^2 = (|x|+|y|)^2$$
On compose alors par la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ *croissante sur* $\mathbb{R}_+$ *pour retrouver l'inégalité triangulaire.*

2. *Pour tout* $(z, z') \in \mathbb{C}^2$,
$$|z+z'|^2 = (z+z')(\overline{z+z'}) = |z|^2 + z\overline{z'} + \overline{z}z' + |z'|^2 = |z|^2 + 2Re(z\overline{z'}) + |z'|^2$$
or on peut majorer la partie réelle obtenue : $2Re(z\overline{z'}) \leq 2|z\overline{z'}| = 2|z||\overline{z'}| = 2|z||z'|$.
Ainsi, on a :
$$|z+z'|^2 \leq |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 = (|z|+|z'|)^2$$
et on conclut encore par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$.

Définition Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, et considérons $a \in E$ et $r > 0$.

- On appelle **boule ouverte de centre** a **et de rayon** r l'ensemble $B(a, r) = \{x \in E,\ \|x-a\| < r\}$.
- On appelle **boule fermée de centre** a **et de rayon** r l'ensemble $B_f(a, r) = \{x \in E,\ \|x-a\| \leq r\}$.
- On appelle **sphère de centre** a **et de rayon** r l'ensemble $S(a, r) = \{x \in E,\ \|x-a\| = r\}$.

Remarques

1. On choisit d'avoir un rayon r strictement positif, car sinon on a trivialement :
$$B(a, 0) = \emptyset, \quad \text{et } B_f(a, 0) = S(a, 0) = \{a\}$$

2. Par inégalité triangulaire, on vérifie aisément que pour tout $\lambda \in [0, 1]$, et pour tout $(x, y) \in B_f(a, r)^2$ (ou bien $B(a, r)^2$),
$$\|\underbrace{\lambda x + (1-\lambda)y} - a\| = \|\lambda(x-a) + (1-\lambda)(y-a)\| \leq \lambda\|x-a\| + (1-\lambda)\|y-a\| \leq r$$
c'est à dire que les boules fermées et ouvertes sont stables par combinaison convexe. Ce sont des **parties convexes** de E, et ainsi on pourra les représenter naïvement de la façon suivante :

Par contre, elles dépendront réellement du choix de la norme retenue.

Définition Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et considérons A une partie de E. On dit que A est **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :
$$\forall x \in A,\ \|x\| \leq M$$
En particulier,

- si (u_n) désigne une suite d'éléments de E, c'est à dire $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, alors on dit que la suite est **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|u_n\| \leq M$$
- si f désigne une application définie sur un ensemble X à valeurs dans E, c'est à dire $f \in F(X, E)$, alors on dit que l'application est **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :
$$\forall x \in X,\ \|f(x)\| \leq M$$

Exemple 1 On se place dans $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$, l'espace des fonctions de classe C^1 sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et on définit l'application $\|.\|$ sur E par :
$$\|f\| = |f(0)| + \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|$$

1. Justifier que l'application $\|.\|$ est bien définie sur E.
2. Montrer que $\|.\|$ désigne bien une norme sur E.
3. L'espace E désigne t-il une partie bornée ?

Propriété 3 (produit fini d'espaces vectoriels normés).

On considère $E_1, \dots, E_p$ des espaces vectoriels normés et on choisit de noter $N_1, \dots, N_p$ des normes associées. On rappelle que $E = E_1 \times \dots \times E_p$ défini par :

$$E = \{x = (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p\}$$

constitue un espace vectoriel pour lequel :

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in E^2,\ x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p) \\ \forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E,\ \lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_p) \end{cases}$$

En notant $N_\infty : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ l'application définie par :

$$N_\infty(x) = \max(N_1(x_1), \dots, N_p(x_p))$$

alors (E, N_∞) désigne un **espace vectoriel normé**, appelé **espace vectoriel produit** muni de la **norme produit**.

▶ *On revient à la définition d'une norme sur un espace vectoriel et on s'appliquera pour retrouver l'inégalité triangulaire.*

1.2 Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien

Définition Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on appelle **produit scalaire** sur E toute forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est à dire une application $\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in E^2,\ \phi(x,y) \in \mathbb{R} \\ \forall (x,x',y,y') \in E^4,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \phi(\lambda x + x', y) = \lambda\phi(x,y) + \phi(x',y) \text{ et } \phi(x, \lambda y + y') = \lambda\phi(x,y) + \phi(x,y') \\ \forall (x,y) \in E^2,\ \phi(y,x) = \phi(x,y) \ \ \text{(symétrie classique)} \\ \forall x \in E,\ \phi(x,x) \geq 0 \text{ et } \phi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases}$$

  et dans ce cas, (E, ϕ) définit un **espace préhilbertien réel**.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on appelle **produit scalaire** sur E toute forme sesquilinéaire hermitienne définie positive, c'est à dire une application $\phi : E \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in E^2,\ \phi(x,y) \in \mathbb{C} \\ \forall (x,x',y,y') \in E^4,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{C},\ \phi(\lambda x + x', y) = \overline{\lambda}\phi(x,y) + \phi(x',y) \text{ et } \phi(x, \lambda y + y') = \lambda\phi(x,y) + \phi(x,y') \\ \forall (x,y) \in E^2,\ \phi(y,x) = \overline{\phi(x,y)} \ \ \text{(symétrie hermitienne)} \\ \forall x \in E,\ \phi(x,x) \geq 0 \text{ et } \phi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases}$$

  et dans ce cas, (E, ϕ) définit un **espace préhilbertien complexe**.

On appelle alors **norme associée à ce produit scalaire** l'application notée $\|.\|_2 : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ et définie par :

$$\|x\|_2 = \sqrt{\phi(x,x)}$$

Remarque Les propriétés du produit scalaire nous donnent immédiatement que $\|.\|_2$ vérifie les axiomes de séparation et l'homogénéité : par exemple avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,

$$\|\lambda x\|_2 = \sqrt{\phi(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\overline{\lambda}\lambda\phi(x,x)} = \sqrt{|\lambda|^2\phi(x,x)} = |\lambda|\|x\|_2$$

mais attention, à ce stade, il ne s'agit pas encore d'une norme : il reste à vérifier l'inégalité triangulaire.

Théorème 4 (inégalité de Cauchy-Schwarz).

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et notons ϕ un produit scalaire sur E. Alors, pour tout $(x,y) \in E^2$,

$$|\phi(x,y)| \leq \|x\|_2.\|y\|_2$$

▶ *Si x est nul, c'est immédiat. Sinon, on distingue les cas réel et complexe. Ainsi, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut introduire la fonction polynôme $P(\lambda) = \|\lambda x + y\|_2^2$ et invoquer le signe de cette fonction sur $\mathbb{R}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on montre d'abord qu'il existe un unique couple $(\lambda, z) \in \mathbb{C} \times x^\perp$ tel que $y = \lambda x + z$, puis on en déduit l'inégalité à l'aide du théorème de Pythagore.*

Propriété 5 (norme associée à un produit scalaire).

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et notons ϕ un produit scalaire sur E. Alors, la norme associée $\|.\|_2$ est une norme sur E.
On parle plus précisément de **norme euclidienne associée** si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou de **norme hermitienne associée** si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

▶ *Il suffit de revenir à la définition d'une norme. Encore une fois, seule l'inégalité triangulaire nécessite une attention particulière puisqu'il faudra alors discuter les cas réel et complexe.*

De cette dernière propriété, on peut en déduire des normes usuelles, toutes associées aux produits scalaires que vous avez pu rencontrer l'an dernier.

Exemple 2

1. (a) On se place dans $E = \mathbb{R}^n$ et on définit $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Etablir que ϕ définit un produit scalaire sur E.

(b) On se place dans $E = \mathbb{C}^n$ et on définit $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ par :

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$$

Etablir que ϕ définit un produit scalaire sur E.

Ainsi, dans $E = \mathbb{K}^n$, on pourra retenir que $\|.\|_2 : x \longmapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$ définit la norme associée au poduit scalaire canonique.

2. (a) On se place dans $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$ et on définit $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\phi(f, g) = \int_a^b fg$$

Etablir que ϕ définit un produit scalaire sur E.

(b) On se place dans $E = C^0([a, b], \mathbb{C})$ et on définit $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ par :

$$\phi(f, g) = \int_a^b \overline{f} g$$

Etablir que ϕ définit un produit scalaire sur E.

Ainsi, dans $E = C^0([a, b], \mathbb{K})$, on pourra retenir que $\|.\|_2 : f \longmapsto \sqrt{\int_a^b |f|^2}$ définit la norme associée au poduit scalaire canonique.

3. (a) On se place dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on définit $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\phi(A, B) = tr(A^T.B) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{ki}$$

Etablir que ϕ définit un produit scalaire sur E.

(b) On se place dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on définit $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ par :

$$\phi(A, B) = tr(\overline{A}^T.B) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{ki}} b_{ki}$$

Etablir que ϕ définit un produit scalaire sur E.

Ainsi, dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pourra retenir que $\|.\|_2 : A \longmapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ki}|^2}$ définit la norme associée au poduit scalaire canonique.

1.3 Quelques exemples fondamentaux

Propriété 6 (normes usuelles sur l'espace des n-uplets).

On se place dans $E = \mathbb{K}^n$ et on définit les applications :

$$\|.\|_1 : x \in E \longmapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|.\|_2 : x \in E \longmapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \quad \|.\|_\infty : x \in E \longmapsto \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

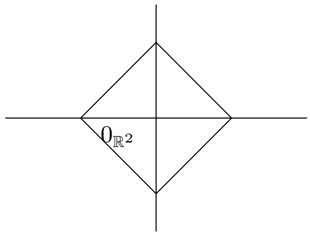
Alors, on vérifie que ces applications définissent bien des normes sur $\mathbb{K}^n$. Elles sont respectivement appelées **norme-1**, **norme-2** et **norme infinie**.

► *Le cas de la norme $\|.\|_2$ a déjà été abordé. Pour les deux autres applications, on revient à la définition d'une norme sur un tel espace vectoriel.*

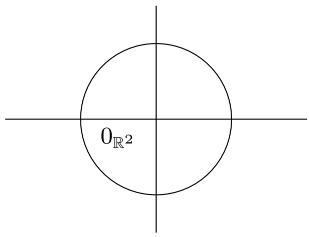
Remarque Il s'agira donc de faire attention aux normes utilisées dans les espaces vectoriels considérés. Par exemple, dans le cas particulier du plan euclidien $\mathbb{R}^2$, on peut représenter la boule unité, de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.

Par définition, on a donc en fonction de la norme retenue :

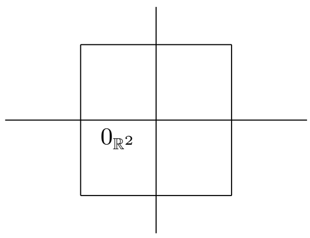
- $B_f(0_{\mathbb{R}^2}, 1) = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \|u\|_1 \leq 1\} = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| + |y| \leq 1\}$



- $B_f(0_{\mathbb{R}^2}, 1) = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \|u\|_2 \leq 1\} = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$



- $B_f(0_{\mathbb{R}^2}, 1) = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \|u\|_\infty \leq 1\} = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \max(|x|, |y|) \leq 1\}$



Propriété 7 (normes usuelles sur l'espace des fonctions continues sur un segment).

On se place dans $E = C^0([a, b], \mathbb{K})$ et on définit les applications :

$$\|.\|_1 : f \in E \longmapsto \int_a^b |f|, \quad \|.\|_2 : f \in E \longmapsto \sqrt{\int_a^b |f|^2}, \quad \|.\|_\infty : f \in E \longmapsto \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

Alors, on vérifie que ces applications définissent bien des normes sur $C^0([a, b], \mathbb{K})$. Elles sont respectivement appelées **norme-1**, **norme-2** et **norme infinie**.

► *Le cas de la norme $\|.\|_2$ a déjà été abordé. Pour les deux autres applications, on revient à la définition d'une norme sur un tel espace vectoriel.*

Remarques

1. Ces trois normes sur l'espace des fonctions continues sur un segment sont importantes, car elles représentent des normes associées à des modes de convergence différents. Ainsi, $\|.\|_1$ est aussi appelée norme pour la convergence en moyenne, $\|.\|_2$ est aussi appelée norme pour la convergence en moyenne quadratique et $\|.\|_\infty$ norme pour la convergence uniforme.

2. En fait, on peut généraliser ces résultats et montrer que pour tout $p \geq 1$:
   - $\|.\|_p : x \in \mathbb{K}^n \longmapsto (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$ désigne encore une norme sur $\mathbb{K}^n$.
   - $\|.\|_p : f \in C^0([a,b],\mathbb{K}) \longmapsto (\int_a^b |f|^p)^{1/p}$ désigne encore une norme sur $C^0([a,b],\mathbb{K})$.

Propriété 8 (normes usuelles sur l'espace des marices carrées).

On se place dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on définit les applications :

$$\|.\|_1 : A \in E \longmapsto \sum_{1\leq i,k\leq n} |a_{ki}|,\quad \|.\|_2 : A \in E \longmapsto \sqrt{\sum_{1\leq i,k\leq n} |a_{ki}|^2},\quad \|.\|_\infty : A \in E \longmapsto \max_{1\leq i,k\leq n} |a_{ki}|$$

Alors, on vérifie que ces applications définissent bien des normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Elles sont respectivement appelées **norme-1**, **norme-2** et **norme infinie**.

► *Le cas de la norme $\|.\|_2$ a déjà été abordé. Pour les deux autres applications, on revient à la définition d'une norme sur un tel espace vectoriel.*

2 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

2.1 Notion de suite convergente

Définition Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et considérons $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$.

- On dit que la suite (u_n) est **convergente dans** E s'il existe $\ell \in E$ tel que :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \|u_n - \ell\| \leq \epsilon$$

- Si la suite (u_n) n'est pas convergente, alors on dit qu'elle est **divergente**.

Remarques

1. Bien entendu, la convergence d'une telle suite (u_n) dépend de la norme considérée sur E et il n'est pas rare de trouver des suites d'un même espace convergentes pour une norme, mais pas pour une autre norme. C'est même tout l'enjeu de ce premier chapitre.
   Ainsi, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la norme utilisée, on notera : $u_n \longrightarrow \ell$, sinon on veillera à préciser la norme associée pour cette limite :

$$u_n \xrightarrow{\|.\|} \ell$$

2. La convergence de la suite (u_n) vers ℓ revient en fait à montrer que la distance $\|u_n - \ell\| \longrightarrow 0$. Ainsi, si la limite est connue, on cherchera le plus souvent à déterminer une suite $(\alpha_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$0 \leq \|u_n - \ell\| \leq \alpha_n \text{ , avec } \alpha_n \longrightarrow 0$$

   Le théorème d'encadrement nous permettra alors de conclure que la suite (u_n) est convergente de limite ℓ.

Théorème 9 (unicité de la limite).

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et considérons $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ qu'on suppose convergente. Alors, la limite est unique et elle est encore notée $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ou simplement $\lim u_n$.

► *On raisonne encore par l'absurde en adaptant la preuve vue en première année.*

En effet, si on suppose que la suite (u_n) converge vers deux limites distinctes ℓ_1 et ℓ_2 dans E. Alors, pour $\epsilon = \|\ell_1 - \ell_2\|/3 > 0$, il vient :

$$\begin{cases} \exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_1,\ \|u_n - \ell_1\| \leq \epsilon \\ \exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_1,\ \|u_n - \ell_2\| \leq \epsilon \end{cases}$$

et ainsi, pour tout $n \geq \max(N_1, N_2)$, on peut écrire à l'aide de l'inégalité triangulaire :

$$\|\ell_1 - \ell_2\| = \|\ell_1 - u_n + u_n - \ell_2\| \leq \|u_n - \ell_1\| + \|u_n - \ell_2\| \leq 2\epsilon = 2\|\ell_1 - \ell_2\|/3$$

d'où, en simplifiant de part et d'autre de l'inégalité : $1 \leq 2/3$. Ce qui est contradictoire et ainsi, la limite est unique.

Propriété 10 (convergente donc bornée).

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Alors, toute suite convergente est bornée.

▶ *On traduit la convergence d'une telle suite pour $\epsilon = 1 > 0$, puis on majore $\|u_n\| = \|u_n - \ell + \ell\|$ à partir d'un certain rang.*

Remarque On fera attention : la réciproque est fausse et on pourra évoquer la suite réelle $((-1)^n)$.

Propriété 11 (opérations sur les limites).

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et considérons $(u_n), (v_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} u_n \longrightarrow \ell_1 \\ v_n \longrightarrow \ell_2 \end{cases}$. On a :

1. $\|u_n\| \longrightarrow \|\ell_1\|$
2. pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda u_n + v_n \longrightarrow \lambda \ell_1 + \ell_2$
3. si de plus la norme sur E désigne une **norme d'algèbre**, c'est à dire qu'elle vérifie $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$, alors :
$$u_n v_n \longrightarrow \ell_1 \ell_2$$

▶ *La limite étant connue, on cherchera à chaque fois à contrôler la différence entre la suite et sa limite.*

Exemple 3 On se place dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on définit l'application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ par :
$$N(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$
Montrer que N désigne une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2.2 Suites extraites et valeurs d'adhérence

Définition Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et considérons $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$.

- On appelle **suite extraite** ou **sous-suite** de (u_n) toute suite (v_n) pour laquelle il existe $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = u_{\phi(n)}$$
Auutrement dit, la suite (v_n) est constituée de termes de la suite (u_n) avec des indices pris de façon croissante.
- On appelle alors **valeur d'adhérence** toute limite d'une suite convergente extraite de la suite (u_n).

Remarque Une telle application ϕ est aussi appelée **application extractrice** et on peut montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi(n) \geq n$.

Propriété 12 (valeur d'adhérence d'une suite convergente).

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et considérons $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$.

1. Si (u_n) est convergente de limite ℓ, alors toute suite extraite converge nécessairement vers ℓ.
2. Toute suite convergente possède donc une seule valeur d'adhérence, sa limite elle même. Et ainsi, toute suite possédant au moins deux valeurs d'adhérence, est nécessairement divergente.

▶ *Pour une sous-suite donnée, on se ramène à la définition de la limite et on utilise la remarque précédente pour montrer qu'elle converge vers ℓ. Le second point découle alors immédiatement du premier.*

Remarque On fera très attention avec cette notion délicate. Par exemple, ce n'est pas parce qu'une suite possède une seule valeur d'adhérence qu'elle est convergente. On pourra considérer la suite $(n^{(-1)^n})$ et pour laquelle on vérifie facilement :
$$\begin{cases} u_{2n} = 2n \longrightarrow +\infty \\ u_{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1} \longrightarrow 0 \end{cases}$$

Propriété 13 (caractérisation de la convergence à l'aide des suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1})).

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et considérons $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$. Alors,

$$(u_n) \text{ converge vers } \ell \;\Leftrightarrow \begin{cases} u_{2n} \longrightarrow \ell \\ u_{2n+1} \longrightarrow \ell \end{cases}$$

▶ *On procède par double implication. Le sens direct est immédiat et seul le sens réciproque nécessite de revenir à la définition de la limite.*

En effet, si les deux suites extraites convergent, alors pour tout $\epsilon > 0$ fixé, on a :

$$\begin{cases} \exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_1,\ \|u_{2n} - \ell\| \leq \epsilon \\ \exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_2,\ \|u_{2n+1} - \ell\| \leq \epsilon \end{cases}$$

Posons alors $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$, et on vérifie que pour tout $n \geq N$, on a :

- *1er cas : si $n = 2p$, alors $n \geq N \Rightarrow 2p \geq 2N_1 \Rightarrow p \geq N_1$ et il vient $\|u_{2p} - \ell\| \leq \epsilon$*
- *2ème cas : si $n = 2p+1$, alors $n \geq N \Rightarrow 2p+1 \geq 2N_2 + 1 \Rightarrow p \geq N_2$ et il vient $\|u_{2p+1} - \ell\| \leq \epsilon$*

c'est à dire dans ces deux : $\|u_n - \ell\| \leq \epsilon$. Ainsi, on reconnaît la définition de la limite et donc, $u_n \longrightarrow \ell$.

2.3 Comparaison des normes

Définition Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et notons N_1, N_2 deux normes quelconques sur E. On dit que ces normes sont **équivalentes** s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que :

$$\forall x \in E,\ \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$$

Propriété 14 (comparaison des normes usuelles sur l'espace des n-uplets).

On se place dans $E = \mathbb{K}^n$ et on rappelle que les applications suivantes définissent des normes usuelles :

$$\|.\|_1 : x \in E \longmapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|.\|_2 : x \in E \longmapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \quad \|.\|_\infty : x \in E \longmapsto \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

De plus, on a pour tout $x \in E$,

$$\begin{cases} \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty \\ \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_2$$

et ainsi, ces trois normes sont équivalentes.

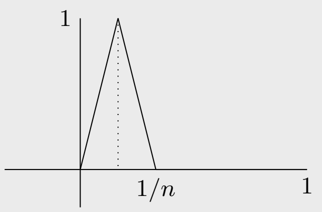
▶ *Pour les premières inégalités, il suffit d'encadrer la norme-1 ou 2. La dernière est obtenue par simple transitivité.*

Remarques

1. On montre facilement que l'équivalence sur les normes désigne une **relation d'équivalence**, au sens où elle est réflexive, symétrique et transitive.
2. En adaptant les inégalités précédentes à la norme $\|.\|_p$, on a encore : $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p}\|x\|_\infty$, et ainsi, le théorème d'encadrement nous livre $\|.\|_p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \|.\|_\infty$, ce qui justifie ici la notation utilisée.

Malheureusement, l'équivalence des normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$ ne peut pas être prolongée à l'espace des fonctions continues sur un segment.

Exemple 4 Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$, on considère $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ les normes usuelles sur E et on définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f_n par :



de sorte que $f_n(t) = \begin{cases} 2nt, & \text{si } t \in [0, 1/2n] \\ -2nt + 2, & \text{si } t \in [1/2n, 1/n] \\ 0, & \text{si } t \in [1/n, 1] \end{cases}$.

Montrer alors que ces trois normes sont deux à deux non équivalentes.

Propriété 15 (invariance du caractère borné et de la convergence)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et notons N_1, N_2 deux normes qu'on suppose équivalentes, $\ell \in E$.

1. Toute suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ bornée pour la norme N_1 est aussi bornée pour la norme N_2.
2. Si de plus, (u_n) est convergente, alors :

$$u_n \xrightarrow{N_1} \ell \quad \Leftrightarrow \quad u_n \xrightarrow{N_2} \ell$$

► *A chaque fois, on traduit l'équivalence des normes : c'est même le théorème d'encadrement qui nous donne le second point.*

3 Cas particulier des suites réelles

On a vu que $(\mathbb{R}, |.|)$ était un espace vectoriel normé de référence, et ainsi toutes les propriétés sur les suites d'éléments d'un espace vectoriel normé sont encore vraies. De plus, il constitue un **corps commutatif totalement ordonné** qui vérifie les **axiomes d'existence des bornes supérieure et inférieure** :

- toute partie A non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure notée $M = \sup A$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in A,\ x \leq M \ \ (M \text{ est un majorant de } A) \\ \forall\ \epsilon > 0,\ \exists x_\epsilon \in A,\ x_\epsilon > M - \epsilon \ \ (M \text{ est le plus petit des majorants de } A, \text{ au sens où on ne majore plus si on diminue } M) \end{cases}$$

- toute partie A non vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure notée $m = \inf A$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in A,\ x \geq m \ \ (m \text{ est un minorant de } A) \\ \forall\ \epsilon > 0,\ \exists x_\epsilon \in A,\ x_\epsilon < m + \epsilon \ \ (m \text{ est le plus grand des minorants de } A, \text{ au sens où on ne minore plus si on augmente } m) \end{cases}$$

3.1 Inégalités et passage à la limite

Définition Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On rappelle que :

- (u_n) est **convergente** s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| \leq \epsilon \Leftrightarrow \ell - \epsilon \leq u_n \leq \ell + \epsilon$$

- (u_n) est **divergente** si elle ne converge pas ou si elle diverge vers $\pm\infty$:

$$\begin{cases} u_n \longrightarrow +\infty : \forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n \geq M \\ u_n \longrightarrow -\infty : \forall m \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n \leq m \end{cases}$$

Remarque En fait, c'est la traduction de ces limites en termes d'inégalités qui nous donnent en première année des résultats fort pratiques.

Théorème 16 (de comparaison)**.**

Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ pour lesquelles on suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \leq v_n$, et notons $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$.

1. Si $u_n \longrightarrow \ell_1$ et $v_n \longrightarrow \ell_2$, alors par passage à la limite $\ell_1 \leq \ell_2$.
2. Si $u_n \longrightarrow +\infty$, alors $v_n \longrightarrow +\infty$.
3. Si $v_n \longrightarrow -\infty$, alors $u_n \longrightarrow -\infty$.

► *On revient à la définition de la limite, mais seul le premier point est délicat, puisque les deux autres s'obtiennent par simple transitivité de la relation d'ordre.*

En effet,

1. *On raisonne par l'absurde en supposant que $\ell_1 > \ell_2$. Avec $\epsilon = (\ell_1 - \ell_2)/3 > 0$, il vient :*

$$\begin{cases} \exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_1,\ \ell_1 - \epsilon \leq u_n \leq \ell_1 + \epsilon \\ \exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_2,\ \ell_2 - \epsilon \leq v_n \leq \ell_2 + \epsilon \end{cases}$$

or ici, le choix de ϵ nous donne : $\ell_2 + \epsilon < \ell_1 - \epsilon$ et ainsi, pour tout $n \geq \max(N, N_1, N_2)$, on a : $v_n \leq \ell_2 + \epsilon < \ell_1 - \epsilon \leq u_n$. En contradiction avec l'hypothèse $u_n \leq v_n$. D'où, l'inégalité $\ell_1 \leq \ell_2$.

2. *Pour tout $M \in \mathbb{R}$ fixé, on a : $\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_1,\ u_n \geq M$. Ainsi, pour tout $n \geq \max(N, N_1)$,*

$$v_n \geq u_n \geq M$$

Finalement, on a trouvé un rang à partir duquel v_n est supérieur à n'importe quelle constante M : on a bien $v_n \longrightarrow +\infty$.

3. *Pour tout $m \in \mathbb{R}$ fixé, on a : $\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_1,\ v_n \leq m$. Ainsi, pour tout $n \geq \max(N, N_1)$,*

$$u_n \leq v_n \leq m$$

Finalement, on a trouvé un rang à partir duquel u_n est inférieur à n'importe quelle constante m : on a bien $u_n \longrightarrow -\infty$.

Remarque On fera attention : les passages à la limite sont donc compatibles avec les inégalités larges, mais pas avec les inégalités strictes... c'est une erreur courante à ne pas négliger.

Théorème 17 (d'encadrement).

Soient $(u_n), (v_n), (w_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ pour lesquelles on suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \leq v_n \leq w_n$, et notons $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, on a :

$$\begin{cases} u_n \longrightarrow \ell \\ w_n \longrightarrow \ell \end{cases} \Rightarrow v_n \longrightarrow \ell$$

► *On revient encore à la définition de la limite : on veillera à se placer à un rang suffisament grand pour avoir toutes les inégalités souhaitées.*

Définition Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dont on suppose tous les termes non nuls à partir d'un certain rang N. On rappelle que :

- $u_n \underset{n \to +\infty}{=} o(v_n) \quad \Leftrightarrow \quad \exists (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \geq N,\ u_n = a_n v_n$ avec $a_n \longrightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_n/v_n \longrightarrow 0$
  et dans ce cas, on dit que (u_n) est **négligeable** devant (v_n).
- $u_n \underset{n \to +\infty}{=} O(v_n) \quad \Leftrightarrow \quad \exists (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \geq N,\ u_n = a_n v_n$ avec (a_n) bornée $\quad \Leftrightarrow \quad (u_n/v_n)$ est bornée.
  et dans ce cas, on dit que (u_n) est **dominée** par (v_n).
- $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n \quad \Leftrightarrow \quad \exists (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \geq N,\ u_n = a_n v_n$ avec $a_n \longrightarrow 1 \quad \Leftrightarrow \quad u_n/v_n \longrightarrow 1$
  et dans ce cas, on dit que (u_n) et (v_n) sont **équivalentes**.

Remarques

1. Ces relations de comparaisons son très pratiques, ne serait-ce que pour déterminer la limite d'une suite mais elles cachent avant tout des inégalités et on pourra plus tard apprendre à sommer, sous certaines conditions, ces relations de comparaison. D'ailleurs, s'il n'y a pas d'ambiguïté, on pourra noter simplement :

$$u_n = o(v_n), \quad u_n = O(v_n), \quad u_n \sim v_n$$

2. La relation $\sim$ doit être maniée avec précaution, car elle est compatible avec la multiplication et donc les puissances, mais n'est pas compatible avec l'addition et certaines compositions. Par exemple,

$$n \sim n+1 \text{ mais } e^n \not\sim e^{n+1}$$

Corollaire 18 (immédiat).

Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dont on suppose tous les termes non nuls à partir d'un certain rang N, et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors, on a immédiatement :

1. $u_n \sim v_n \ \Leftrightarrow\ u_n = v_n + o(v_n)$
2. $\begin{cases} u_n \sim v_n \\ v_n \longrightarrow \ell \end{cases} \Rightarrow u_n \longrightarrow \ell$

3.2 Des théorèmes de convergence très utiles

Théorème 19 (de la limite monotone pour une suite croissante)**.**

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qu'on suppose croissante.

1. Si (u_n) est majorée, alors la suite est convergente et on a $\lim u_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$, qu'on peut aussi noter $\sup u_n$.
2. Sinon, la suite (u_n) est divergente et $\lim u_n = +\infty$.

► *Pour le premier point, on montre que $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ possède une borne supérieure dont on prouvera qu'elle désigne tout simplement la limite de la suite. Pour le second point, il suffit de nier l'hypothèse de majoration et d'invoquer la monotonie... on retrouvera alors la définition d'une suite divergente.*

Théorème 20 (de la limite monotone pour une suite décroissante)**.**

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qu'on suppose décroissante.

1. Si (u_n) est minorée, alors la suite est convergente et on a $\lim u_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$, qu'on peut aussi noter $\inf u_n$.
2. Sinon, la suite (u_n) est divergente et $\lim u_n = -\infty$.

► *On adapte la démonstration précédente et on prouvera d'abord l'existence de la borne inférieure.*

Exemple 5 On considère (u_n) une suite réelle bornée et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \sup\{u_p, p \geq n\} \text{ et } w_n = \inf\{u_p, p \geq n\}$$

1. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes.
2. On note alors $\lim v_n = \limsup u_n$ et $\lim w_n = \liminf u_n$. Etablir que ces deux limites représentent en fait des valeurs d'adhérence pour la suite (u_n).
3. Soit ℓ une valeur d'adhérence de la suite (u_n). Montrer que : $\liminf u_n \leq \ell \leq \limsup u_n$.

Ainsi, on pourra retenir que les limites $\liminf$ et $\limsup$ désignent respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs d'adhérence d'une suite.

Théorème 21 (de convergence des suites adjacentes)**.**

Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qu'on suppose adjacentes, c'est à dire que par exemple : $\begin{cases} (u_n) \text{ est croissante} \\ (v_n) \text{ est décroissante} \\ v_n - u_n \longrightarrow 0 \end{cases}$. Alors, on a :

1. les deux suites sont convergentes et de même limite ℓ.
2. de plus, on peut encadrer cette limite de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell \leq v_n$.

► *On introduit la suite auxiliaire $w_n = v_n - u_n$ et on prouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \geq 0$. On peut alors exploiter la monotonie des suites données pour exhiber un encadrement de celles-ci et conclure à l'aide du théorème de la limite monotone.*

Remarque On essaiera de retenir cet encadrement, car il peut être utile. D'ailleurs, si les suites données sont strictement motonones, on peut même préciser que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n < u_{n+1} \leq \ell \leq v_{n+1} < v_n \ \Rightarrow\ u_n < \ell < v_n$$

et ainsi, l'encadrement de la limite est strict.

Exemple 6 On définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$$

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
2. On peut montrer que $e = \lim u_n = \lim v_n$. Prouver alors que e est un nombre irrationnel.

Théorème 22 (de Bolzano-Weierstrass).

Toute suite réelle bornée admet au moins une valeur d'adhérence, c'est à dire qu'elle admet au moins une suite extraite convergente.

► *On va procéder par encadrement et on construit par récurrence des segments emboités $I_n = [a_n, b_n]$ de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n possède une infinité de termes de la suite (u_n).*

Pour cela, considérons une suite réelle (u_n) qu'on suppose bornée et posons :

$$\begin{cases} a_0 = \inf u_n \\ b_0 = \sup u_n \end{cases} \quad \text{et ainsi, } I_0 = [a_0, b_0] \text{ contient une infinité de termes.}$$

Puis, par récurrence, ayant construit un tel segment $I_n = [a_n, b_n]$ contenant une infinité de termes, on calcule le point milieu $c_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ et on pose :

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = c_{n+1} \end{cases} \quad \text{si } [a_n, c_{n+1}] \text{ possède une infinité de termes, ou bien.} \begin{cases} a_{n+1} = c_{n+1} \\ b_{n+1} = b_n \end{cases} \quad \text{sinon}$$

Et dans les deux cas, $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$ contient une infinité de termes de la suite (u_n).
Pour finir, on choisit alors des termes extraits de la suite (u_n) en veillant à chaque fois à piocher d'une part dans les segments I_n et en veillant d'autre part à prendre des indices croissants. On a alors une suite extraite $(u_\phi(n))$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \leq u_{\phi(n)} \leq b_n$$

Or les segments I_n étant emboités, on a : (a_n) croissante, (b_n) décroissante et $b_n - a_n = (b_0 - a_0)/2^n \longrightarrow 0$. Ces suites étant adjacentes, elles convergent donc vers une même limite ℓ.
Le théorème d'encadrement nous permet de conclure que la suite extraite $(u_{\phi(n)})$ ainsi construite est bien convergente et on en déduit le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Remarques

1. On aurait pu aussi revenir à un exemple rencontré plus tôt : en effet, les limites $\limsup$ et $\liminf$ fournissent des valeurs d'adhérence d'une telle suite bornée, ce qui prouve le théorème de Bolzano-Weierstrass et nous livre un exemple explicite de valeur d'adhérence.
2. Ce théorème a de nombreuses applications : c'est notamment grâce à lui qu'on peut prouver en première année le théorème de Heine pour les fonctions continues d'une variable réelle, ou encore que l'image continue d'un segment est un segment.

Corollaire 23 (critère de convergence pour les suites bornées).

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qu'on suppose bornée. Si de plus, (u_n) possède une unique valeur d'adhérence ℓ, alors la suite est convergente et on a :

$$u_n \longrightarrow \ell$$

► *On raisonne par l'absurbe en supposant que $u_n \not\longrightarrow \ell$ et on construit une suite extraite qui ne peut pas tendre vers ℓ.*

Remarques

1. Ce résultat est assez pratique, car pour prouver la convergence d'une telle suite bornée, cela revient à résoudre un problème d'unicité. Bien entendu, c'est le genre de résultat théorique qu'on réservera aux exercices les plus difficiles.
2. D'ailleurs, si la suite est bornée et divergente, c'est donc que nécessairement elle admet au moins deux valeurs d'adhérence distinctes.

3.3 Application à l'étude des suites à valeurs complexes

Encore une fois, $(\mathbb{C}, |.|)$ est un espace vectoriel normé de référence et on retrouvera les propriétés générales de ces espaces. Malheureusement, il ne possède pas de relation d'ordre naturel et l'étude des suites complexes nécessitera souvent de se ramener aux suites réelles qui les constituent.

Propriété 24 (convergence d'une suite complexe).

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n + ib_n$, et notons $\ell = \alpha + i\beta$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Alors, on a l'équivalence :

$$u_n \longrightarrow \ell \Leftrightarrow \begin{cases} a_n \longrightarrow \alpha \\ b_n \longrightarrow \beta \end{cases}$$

► *On procède par double implication. Le sens direct est immédiat, car on peut majorer les différences par le module* $|u_n - \ell|$. *Pour le sens réciproque, on calculera simplement le module avant de passer à la limite.*

Remarque Finalement, l'étude d'une suite à valeurs complexes se ramène à l'étude de deux suites réelles, les suites partie réelle (a_n) et partie imaginaire (b_n).
D'ailleurs, il peut aussi être utile de faire appel à la forme exponentielle et ainsi, si $u_n = \rho_n e^{i\theta_n}$ avec $\rho_n \longrightarrow \alpha$ et $\theta_n \longrightarrow \beta$, alors :

$$u_n = \rho_n e^{i\theta_n} = \rho_n \cos(\theta_n) + i\rho_n \sin(\theta_n) \longrightarrow \alpha \cos(\beta) + i\alpha \sin(\beta) = \alpha e^{i\beta}$$

Exemple 7 Fixons $\lambda \in \mathbb{R}$ et on définit la suite (z_n) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$z_n = (1 + i\frac{\lambda}{n})^n$$

Montrer que (z_n) converge et préciser sa limite.

Théorème 25 (de Bolzano-Weierstrass)**.**

Toute suite complexe bornée admet au moins une valeur d'adhérence, c'est à dire qu'elle admet au moins une suite extraite convergente.

► *On se ramène aux suites partie réelle et imaginaire, puis on invoque le théorème dans le cas réel... attention, on veillera à faire une extraction diagonale des termes afin d'exhiber une seule application extractrice.*

Corollaire 26 (critère de convergence pour les suites bornées)**.**

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qu'on suppose bornée. Si de plus, (u_n) possède une unique valeur d'adhérence ℓ, alors la suite est convergente et on a :

$$u_n \longrightarrow \ell$$

3.4 Quelques rappels sur les suites récurrentes classiques

Propriété 27 (suite arithmétique)**.**

On rappelle qu'une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est **arithmétique** s'il existe $r \in \mathbb{K}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$.
Et dans ce cas, on montre par récurrence que :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + n.r$ et plus généralement, avec p fixé dans $\mathbb{N}$, $\forall n \geq p,\ u_n = u_p + (n-p).r$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1).\dfrac{(u_0 + u_n)}{2}$

Remarque On apprendra à utiliser cette dernière formule, car elle nous permet d'aller plus vite pour déterminer l'expression de sommes classiques :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},\quad \sum_{k=2}^{n-1} k = \frac{(n-2)(n+1)}{2}\ \dots$$

Propriété 28 (suite géométrique)**.**

On rappelle qu'une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est **géométrique** s'il existe $q \in \mathbb{K}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q.u_n$.
Et dans ce cas, on montre par récurrence que :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0.q^n$ et plus généralement, avec p fixé dans $\mathbb{N}$, $\forall n \geq p,\ u_n = u_p.q^{n-p}$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} u_0.\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & \text{si } q \neq 1 \\ u_0.(n+1), & \text{si } q = 1 \end{cases}$

Remarques

1. On apprendra encore à utiliser cette dernière formule, car elle nous permet d'aller plus vite, mais surtout d'éviter des erreurs grossières. Ainsi, si $q \neq 1$, on fera attention à ce que :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad \sum_{k=1}^{n} q^k = q.\frac{1-q^n}{1-q}, \quad \sum_{k=2}^{n} q^k = q^2.\frac{1-q^{n-1}}{1-q} \quad \ldots$$

2. Il faudra connaître en particulier le comportement asymptotique de la suite géométrique (q^n) avec $q \in \mathbb{C}$. En effet,

   - $q = 0 \Rightarrow$ la suite est évidemment nulle à partir du rang 1.
   - $|q| > 1 \Rightarrow |q^n| = |q|^n = e^{n\ln(|q|)} \longrightarrow +\infty$, et donc la suite est divergente au sens où elle ne peut pas converger.
   - $0 < |q| < 1 \Rightarrow |q^n| = |q|^n = e^{n\ln(|q|)} \longrightarrow 0$, et donc la suite tend vers 0.
   - $|q| = 1, q = 1 \Rightarrow$ la suite est évidemment constante égale à 1.
   - $|q| = 1, q \neq 1 \Rightarrow$ on raisonne par l'absurde en supposant que la suite converge et en notant ℓ sa limite :

   comme $q^{n+1} = q.q^n$, il vient par passage à la limite $\ell = q\ell \Leftrightarrow \ell(1-q) = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$. Mais alors :

   $$\begin{cases} |q^n| \longrightarrow |\ell| = 0 \\ |q^n| = |q|^n = 1 \longrightarrow 1 \end{cases} \quad \text{ce qui est impossible par unicité de la limite, et donc la suite est divergente.}$$

   Finalement, on retrouve bien que la suite (q^n) converge si et seulement si $|q| < 1$ ou $q = 1$.

Exemple 8 Montrer que la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = n\sin(2\pi n! e)$$

est convergente et préciser sa limite.

Propriété 29 (suite arithmético-géométrique).

On rappelle qu'une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est **arithmético-géométrique** s'il existe $a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 1, b \neq 0$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} = au_n + b$$

Dans ce cas, on pose $\ell = b/(1-a)$ et on montre que $v_n = u_n - \ell$ définit une suite géométrique de raison a de sorte que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n = (u_0 - \ell).a^n + \ell$$

Propriété 30 (suite récurrente linéaire d'ordre 2).

On rappelle qu'une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe $a, b \in \mathbb{K}$ avec $b \neq 0$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

Dans ce cas, on résout l'équation caractéristique associée dans $\mathbb{C}$: $r^2 - ar - b = 0$ et ainsi,

- si $\Delta \neq 0$, l'équation admet deux racines distinctes r_1, r_2, et on a : $(u_n) \in Vect((r_1^n), (r_2^n))$.
- si $\Delta = 0$, l'équation admet une racine double r_0, et on a : $(u_n) \in Vect((r_0^n), (nr_0^n))$.

► *On pose $E = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \; u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n = 0\}$ et on montre que $\phi : (u_n) \in E \longmapsto (u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$ définit un isomorphisme d'espaces vectoriels. On en déduit que $dim(E) = 2$ et on vérifie simplement que les suites données représentent à chaque fois deux vecteurs indépendants de E.*

Par définition d'une telle suite à deux pas, pour tout couple de conditions initiales données, il existe une unique suite (u_n) associée dans E. L'application ϕ étant linéaire, c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels de sorte que :

$$dim(E) = dim(\mathbb{K}^2) = 2$$

On vérifie alors que les vecteurs données dans les deux cas conviennent, et n'étant pas colinéaires, ils constituent une base de E. Ce qui nous permet d'en déduire que toute suite de E est bien engendrée par ces vecteurs.

Remarques

1. Dans le cas particulier d'une suite réelle pour laquelle l'équation caractéristique nous donnerait deux racines complexes conjuguées $r_1 = \rho e^{i\theta}, r_2 = \rho e^{-i\theta}$, on peut affiner l'écriture :

$$(u_n) \in Vect((r_1^n), (r_2^n)) = Vect((\rho^n \cos(n\theta)), (\rho^n \sin(n\theta)))$$

2. Bien entendu, on ne traite pas ici toutes les suites classiques et il faudra revoir le cas des systèmes dynamiques discrets de la forme :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

et pour lesquels on cherche souvent :

- à étudier la monotonie de f et y placer des points fixes éventuels afin de reconnaître des intervalles stables
- à identifier la nature de la suite (u_n) en fonction des intervalles accrochés par u_0.

4 Cas particulier des espaces vectoriels normés de dimenion finie

Définition Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé qu'on suppose de dimension finie, et considérons $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Alors, pour toute suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, il existe des **suites composantes** $(u_{1,n}), \ldots, (u_{p,n}) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_{1,n}e_1 + \ldots + u_{p,n}e_p$$

Remarque C'est tout simplement ce qu'on fait pour $\mathbb{C}$ lorsqu'on voit celui-ci comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. D'ailleurs, on pourra même étendre les autres propriétés à condition de prouver d'abord ce résultat fondamental :

Théorème 31 (de Bolzano-Weierstrass dans $(E, \|.\|_\infty)$).

Soit E un espace vectoriel qu'on suppose de dimension finie, et considérons $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E, $\|.\|_\infty$ la norme infinie définie sur E par :

$$\|x\|_\infty = \|x_1e_1 + \ldots + x_pe_p\|_\infty = \max_{1\leq 1\leq p} |x_i|$$

Alors, toute suite bornée de E admet au moins une valeur d'adhérence, c'est à dire qu'elle admet au moins une suite extraite convergente.

► *On se ramène aux suites composantes, puis on invoque le théorème sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$... attention, on veillera encore à faire une extraction diagonale des termes afin d'exhiber une seule application extractrice.*

En effet, si une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est bornée, alors :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \|u_n\|_\infty \leq M \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \forall i \in [\![1, p]\!],\ |u_{i,n}| \leq M$$

et ainsi, les suites composantes sont toutes bornées dans $\mathbb{K}$.

- *En particulier, $(u_{1,n})$ étant bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\phi_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la sous-suite $(u_{1,\phi_1(n)})$ converge vers une limite ℓ_1.*
- *De la même façon, $(u_{2,n})$ est bornée, et donc $(u_{2,\phi_1(n)})$ aussi : il existe $\phi_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la sous-suite $(u_{2,\phi_1\circ\phi_2(n)})$ converge vers une limite ℓ_2.*
- *Et on itère le processus jusqu'à avoir l'existence de $\phi_p : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la sous-suite $(u_{p,\phi_1\circ\phi_2\ldots\circ\phi_p(n)})$ converge vers une limite ℓ_p.*

Posons $\phi = \phi_1 \circ \phi_2 \ldots \circ \phi_p$ et on vérifie que ϕ désigne une application extractrice telle que :

$$\begin{cases} (u_{1,\phi(n)}) \text{ sous-suite de } (u_{1,\phi_1(n)}) \text{ converge vers } \ell_1 \\ (u_{2,\phi(n)}) \text{ sous-suite de } (u_{2,\phi_1\circ\phi_2(n)}) \text{ converge vers } \ell_2 \\ \ldots \\ (u_{p,\phi(n)}) \text{ converge vers } \ell_p \end{cases}$$

et par conséquent, avec $\ell = \ell_1e_1 + \ldots \ell_pe_p$, on a :

$$\|u_{\phi(n)} - \ell\|_\infty = \max_{1\leq 1\leq p} |u_{i,\phi(n)} - \ell_i| \longrightarrow 0$$

Autrement dit, on a bien prouvé l'existence d'une suite extraite de (u_n) convergente.

Théorème 32 (équivalence des normes en dimension finie).

Soit E un espace vectoriel qu'on suppose de dimension finie, et considérons $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E, $\|.\|_\infty$ la norme infinie définie sur E.

1. Pour toute norme N définie sur E, N et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes.
2. Par transitivité, on en déduit que toutes les normes en dimension finie sont équivalentes.

▶ *Pour le premier point, on cherche à comparer ces normes : dans un premier temps, il est facile de montrer que $N(x) \leq \alpha\|x\|_\infty$ à l'aide de l'inégalité triangulaire. Puis, on introduit la sphère unité $S(0,1) = \{x \in E,\ \|x\|_\infty\} = 1$, partie compacte de $(E, \|.\|_\infty)$ avant d'invoquer la continuité de N sur $(E, \|.\|_\infty)$. Le second point s'obtient alors facilement par transitivité de la relation d'équivalence sur les normes.*

Remarques

1. Même si c'est difficile, on essaiera de comprendre que ce résultat dépend implicitement du théorème de Bolzano-Weierstrass dans $(E, \|.\|_\infty)$: c'est lui qui nous permet d'affirmer qu'en dimesion finie, $S(0,1)$ est compacte.
2. Les normes étant toutes équivalentes, on fera très souvent le choix de travailler avec la norme infinie dans les espaces vectoriels normés de dimension finie. De plus, on pourra retenir que la nature d'une suite en dimension finie est donc une **propriété intrinsèque**, c'est à dire qu'elle ne dépend pas de la norme avec laquelle on travaille.
3. Les normes étant toutes équivalentes, on peut réénoncer le **théorème de Bolzano-Weierstrass** dans un cadre plus général et ainsi : de toute suite bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie, on peut toujours extraire une sous-suite convergente.

Corollaire 33 (critère de convergence pour les suites bornées).

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé qu'on suppose de dimension finie et considérons $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ qu'on suppose bornée. Si de plus, (u_n) possède une unique valeur d'adhérence ℓ, alors la suite est convergente et on a :

$$u_n \longrightarrow \ell$$

Propriété 34 (convergence d'une suite d'un espace vectoriel normé de dimension finie).

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé qu'on suppose de dimension finie, et considérons $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E, $\ell = \ell_1 e_1 + \ldots + \ell_p e_p \in E$. Alors, pour toute suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, on a l'équivalence :

$$u_n \longrightarrow \ell \Leftrightarrow \text{ ses suites composantes convergent dans } \mathbb{K} \text{ avec pour tout } i \in [\![1,p]\!],\ u_{i,n} \longrightarrow \ell_i$$

▶ *On procède par double implication. A chaque fois c'est immédiat, car en dimension finie les normes étant équivalentes, on a aussi $\|u_n - \ell\|_\infty \longrightarrow 0$.*

Remarque Finalement, l'étude d'une suite en dimension finie se ramène à l'étude des suites composantes qui la constituent et on retiendra en particulier :

- dans $\mathbb{K}^p$, une suite de vecteurs (u_n) converge si et seulement si les suites composantes convergent et on a :

$$\lim u_n = (\lim u_{1,n}, \ldots, \lim u_{p,n})$$

- dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, une suite de matrices (A_n) convergent si et seulement si les suites de coefficients $(a_{ij}(n))$ convergent et on a :

$$\lim A_n = \begin{pmatrix} \lim a_{11}(n) & \ldots & \lim a_{1p}(n) \\ \vdots & & \vdots \\ \lim a_{p1}(n) & \ldots & \lim a_{pp}(n) \end{pmatrix}$$

D'ailleurs, c'est ce qu'on a utilisé dans le chapitre précédent pour justifier le calcul de l'exponentielle d'une matrice A donnée, ou encore pour déterminer la limite de (A^n) quand A désigne une matrice strictement stochastique.