Chapitre 12

Fonctions vectorielles et systèmes différentiels linéaires

Tout au long de l'année, nous avons essentiellement travaillé sur des fonctions à valeurs réelles ou complexes. On s'inspire alors de ce qui a été fait pour généraliser quelques résultats aux fonctions vectorielles.
Cela nous permettra en outre de revenir sur la résolution des équations différentielles linéaires, en passant à chaque fois par un système différentiel et pour lequel l'inconnue ne sera rien d'autre qu'une fonction vectorielle à valeurs dans $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$.

Programmes 2022

Pour aller plus loin
On revient surtout sur le principe de résolution des équations différentielles linéaires vues en première année, mais ce sera aussi l'occasion de mettre en lumière un théorème fondamental : le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire qui justifie la forme et la structure des solutions recherchées.

1 Fonctions vectorielles d'une variable réelle

On considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et on note $\|.\|$ une norme sur E.

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$ et à valeurs dans E. On dit encore que f est **dérivable** en un réel $a \in I$ si le taux d'accroissement de f possède une limite finie dans E. Ce vecteur limite sera noté $f'(a)$ et ainsi :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si de plus, la fonction f est dérivable en tout point de I, on appelle encore **dérivée** de f l'application définie sur I par :

$$f' : t \longmapsto f'(t)$$

Remarque On généralise naturellement des notions connues mais pour ces fonctions vectorielles, on préfèrera travailler sur les accroissements de la forme $f(a+h) - f(a)$, plus simple à mettre en oeuvre.
D'ailleurs, quand cette différence pourra être approchée par une application linéaire, on parlera volontiers d'**application différentielle** associée.

Théorème 1 (caractérisation de la dérivabilité)**.**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans E. Alors, f est dérivable en $a \in I$ si et seulement s'il existe un vecteur $\ell_a \in E$ tel que :

$$f(a+h) = f(a) + h.\ell_a + \underset{h \to 0}{o}(h)$$

Dans ce cas, on a $\ell_a = f'(a)$ et l'application $df_a : h \longmapsto h.\ell_a$ désigne l'**application différentielle** associée en a.

► *C'est immédiat : on procède simplement par double implication.*

Remarques

1. On prolonge ici la caractérisation vue en première année pour les fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles, c'est à dire que f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité d'ordre 1 en a et dans ce cas, on a toujours :
$$f(x) = f(a) + (x-a).f'(a) + \underset{x \to a}{o}(x-a)$$
2. Attention, si on veut établir que $f(a+h) - f(a) - h.\ell_a = o(h)$, il faudra penser à raisonner en norme $\|.\|$ puisqu'on manipule des vecteurs et montrer que :
$$\left\| \frac{f(a+h) - f(a) - h.\ell_a}{h} \right\| \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Exemple 1 Fixons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on considère l'application $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par :

$$\phi(t) = \exp(tA)$$

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la norme $\|.\|_2$ dont on sait qu'il s'agit d'une norme d'algèbre.

1. (a) Etablir que ϕ est dérivable en 0 et que $\phi'(0) = A$ de sorte que :
$$\frac{\exp(hA) - I_n}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} A$$
   (b) En déduire que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\phi'(t) = A\exp(tA) = \exp(tA)A$$
2. En utilisant cette fois-ci les résultats sur les séries de fonctions, établir que ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\phi'(t) = A\exp(tA) = \exp(tA)A$$

Remarque On fera attention à ne pas généraliser cette formule de dérivation... et par exemple, la formule :

$$\frac{d}{dt}(\exp(U(t))) = U'(t)\exp(U(t)) \text{ n'est pas toujours vraie lorsque } U \text{ désigne une fonction vectorielle !}$$

C'est pour cela qu'on ne pourra pas obtenir la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz par la seule **méthode du facteur intégrant**, et que celle-ci doit reposer sur autre chose.

Propriété 2 (caractérisation de la dérivabilité en dimension finie).

Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans E, et notons $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E de sorte que pour tout $x \in I$, $f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)e_k$. Alors, f est dérivable sur I si et seulement si les applications composantes $f_k : I \longrightarrow \mathbb{K}$ sont dérivables et dans ce cas,

$$\forall\, x \in I,\ f'(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x)e_k$$

▶ *On revient simplement au taux d'accroissement, qu'on pourra réécrire dans la base B.*

Remarques

1. L'étude d'une fonction d'une variable réelle à valeurs dans un espace de dimension finie revient donc à étudier les fonctions composantes. D'ailleurs, c'est exactement ce que vous faites en mécanique avec l'étude des trajectoires données par des équations horaires. En mathématiques, on appelle cela l'étude des **arcs paramétrés**.

2. De la même façon, on peut aussi prolonger la notion de fonction de classe C^n sur un intervalle : une telle fonction f sera dite de classe C^n sur I si et seulement si les applications composantes f_k sont de classe C^n sur I et dans ce cas,

$$\forall\, x \in I,\ f^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k^{(n)}(x)e_k$$

Propriété 3 (cas particulier des applications linéaires sur un espace de dimension finie).

Soit f une fonctions définie sur un intervalle I à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie E et considérons $L : E \longrightarrow F$ une application linéaire.
Si de plus, f est dérivable sur I, alors $L(f)$ est encore dérivable sur I et on a :

$$\forall\, x \in I,\ (L \circ f)'(x) = L(f'(x))$$

▶ *On pose $u(x) = L \circ f(x)$ et on revient au taux d'accroissement avant de passer à la limite : attention, il ne faudra pas oublier de justifier la continuité de L.*

Propriété 4 (cas particulier des applications bilinéaires sur des espaces de dimension finie).

Soient f_1, f_2 des fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie E_i et considérons $B : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ une application bilinéaire.
Si de plus, f_1 et f_2 sont dérivables sur I, alors $B(f_1, f_2)$ est encore dérivable sur I et on a :

$$\forall\, x \in I,\ (B(f_1, f_2))'(x) = B(f_1'(x), f_2(x)) + B(f_1(x), f_2'(x))$$

▶ *On pose $u(x) = B(f_1(x), f_2(x))$ et on revient au taux d'accroissement avant de passer à la limite : attention, il ne faudra pas oublier de justifier la continuité de B.*

Remarques

1. Ce dernier résultat se généralise et on pourra même dériver des applications multi-linéaires. Autrement dit, en notant M une application n-linéaire et si $f_1, \ldots, f_n : I \longrightarrow E_i$ sont dérivables sur I, alors $M(f_1, \ldots, f_n)$ est dérivable sur I et on a :
$$\forall\, x \in I,\ (M(f_1, \ldots, f_n))'(x) = \sum_{k=1}^{n} M(f_1(x), \ldots, f_k'(x), \ldots, f_n(x))$$
On pourra donc dériver de nombreuses expressions vectorielles : que ce soit le produit scalaire de deux fonctions d'une variable réelle, le produit de deux matrices à paramètre réel $A(x).B(x)$ ou encore le déterminant d'une matrice à paramètre réel $M(x)$ en voyant simplement chacune des colonnes comme une fonction vectorielle.

2. On peut même aller plus loin et définir l'intégrale d'une telle fonction d'une variable réelle à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. En fait, il suffit une fois encore de se ramener aux applications composantes et ainsi, si $f = \sum_{k=1}^{n} f_k e_k$ avec $f_1, \ldots, f_n$ continues par morceaux sur $[a, b]$, on a par définition :
$$\int_a^b f(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n} (\int_a^b f_k(t)\, dt)e_k$$
On pourra donc intégrer de nombreuses expressions vectorielles et prolonger des propriétés utiles qui avaient été établies pour les fonctions à valeurs réelles ou complexes : les propriétés de l'intégrale, les formules du calcul intégral, la formule de Taylor avec reste intégral...

2 Equations différentielles linéaires et systèmes différentiels linéaires

2.1 Existence et structure des solutions

Définition Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre** n toute équation de la forme :

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + \ldots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t) \quad (\mathcal{E})$$

d'inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et pour laquelle a_i et b désignent des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, et $a_n \neq 0$.

On dit alors que :

- $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est **solution** de $(\mathcal{E})$ si f est de classe C^n sur I telle que : $\forall\, t \in I,\ a_n(t)f^{(n)}(t)+\ldots+a_1(t)f'(t)+a_0(t)f(t) = b(t)$.
- $f_1, \ldots, f_p$ sont des **solutions linéairement indépendantes** de $(\mathcal{E})$ si elles désignent des solutions sur I telles que :

$$\forall\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_p f_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$$

autrement dit, elles représentent une famille libre de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$.

Remarques

1. De façon un peu abusive, ces équations seront parfois données sous la forme :

$$a_n(t)y^{(n)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$$

2. En particulier, on a : $a_n \neq 0_{\mathcal{F}(I,\mathbb{K})}$. On en déduit par continuité de a_n, qu'il existe un intervalle $J \subset I$ tel que pour tout $t \in J$, $a_n(t) \neq 0$. Ainsi, l'équation pourra toujours être ramenée sous une **forme résolue** ou **normalisée**, c'est à dire que sur des intervalles bien choisis :

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + \ldots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t) \;\Leftrightarrow\; y^{(n)}(t) + \ldots + \frac{a_1(t)}{a_n(t)}y'(t) + \frac{a_0(t)}{a_n(t)}y(t) = \frac{b(t)}{a_n(t)}$$

et les solutions obtenues pourront dépendre de l'intervalle considéré.

Définition Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle encore **système différentiel linéaire du premier ordre** toute équation de la forme :

$$X'(t) + A(t)X(t) = B(t) \quad (\mathcal{S})$$

d'inconnue $X : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ et pour laquelle les fonctions $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ désignent des fonctions vectorielles qu'on suppose continues sur I.

On dit alors que :

- $X : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ est **solution** de $(\mathcal{S})$ si X est de classe C^1 sur I telle que : $\forall\, t \in I,\ X'(t) + A(t)X(t) = B(t)$.
- $X_1, \ldots, X_p$ sont des **solutions linéairement indépendantes** de $(\mathcal{S})$ si elles désignent des solutions sur I telles que :

$$\forall\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ \lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_p X_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$$

autrement dit, elles représentent une famille libre de $\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}))$.

Propriété 5 (équivalence entre équation différentielle linéaire et système différentiel linéaire)**.**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et considérons l'équation différentelle linéaire normalisée :

$$y^{(n)}(t) + \ldots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t) \quad (\mathcal{E})$$

Alors, en notant $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$, f est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si $X = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ \vdots \\ f^{(n-1)} \end{pmatrix}$ est solution du système différentiel linéaire :

$$X'(t) + \begin{pmatrix} 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & -1 \\ a_0(t) & \ldots & & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Autrement dit, déterminer les solutions d'une telle équation revient à résoudre le système différentiel linéaire du premier ordre qui lui est associé.

▶ *C'est immédiat, cela résulte des opérations matricielles.*

Remarque Cette équivalence est fondamentale, car c'est elle qui nous permettra de retrouver la structure des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 1 ou 2 qui vous ont été présentées l'an dernier. En particulier,

- pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1, c'est évident car on peut identifier les espaces $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$.
- pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2 :

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \Leftrightarrow X'(t) + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix} X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}, \text{ avec } X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

Théorème 6 (de Cauchy-Lipschitz linéaire)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère le système différentiel linéaire :

$$X'(t) + A(t)X(t) = B(t)$$

avec $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ qu'on suppose continues sur I.
Alors, on admet que pour tout $(t_0, X_0) \in I \times \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$, il existe une unique solution $X : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ telle que :

$$\begin{cases} \forall\, t \in I,\ X'(t) + A(t)X(t) = B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \qquad (*)$$

On dit aussi que X est l'unique solution du **problème de Cauchy** $(*)$.

En particulier, l'équivalence précédente nous donne :

- **pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1** de la forme $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$:
pour tout $(t_0, \alpha) \in I \times \mathbb{K}$, il existe une unique solution $y : I \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que :

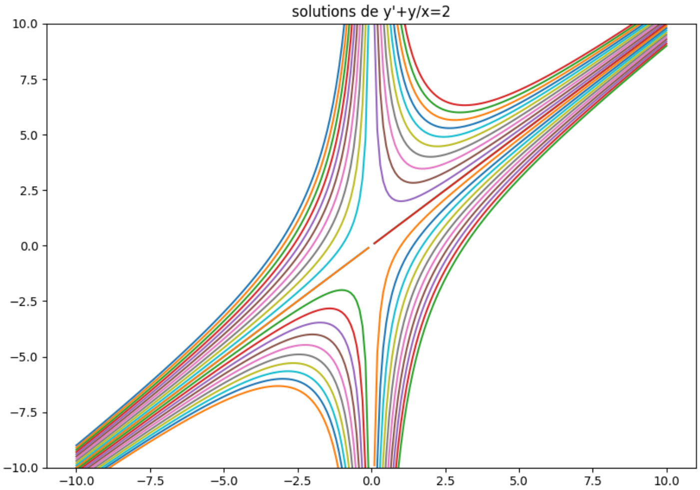
$$\begin{cases} \forall\, t \in I,\ y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \\ y(t_0) = \alpha \end{cases}$$

- **pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2** de la forme $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$:
pour tout $(t_0, \alpha, \beta) \in I \times \mathbb{K}^2$, il existe une unique solution $y : I \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall\, t \in I,\ y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \\ \begin{pmatrix} y(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \end{cases}$$

Remarques

1. Ce théorème est fondamental et on lui trouvera de nombreuses applications. Par exemple, comme $I \times \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ n'est pas vide, on aura toujours l'existence d'une solution sur I même si celle-ci dépend des conditions initiales.
2. Les solutions d'une équation différentielle dépendront donc de l'intervalle de travail et des conditions initiales retenues. Le plus souvent, on pourra représenter un ensemble de solutions passant par des points donnés : on parle alors de **faisceau de courbes intégrales**.



D'ailleurs, on essaiera parfois de faire un **raccordement des solutions**, au sens où on cherchera à déterminer une **solution maximale** de cette équation.

3. La preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz repose en fait sur un **théorème de point fixe**, c'est très joli mais elle est admise en dimension quelconque. Néanmoins, dans le cas particulier des équations différentielles linéaires du premier ordre, on peut quand même expliciter la solution par analyse-synthèse et à l'aide d'un **facteur intégrant** :

Théorème 7 (de Cauchy-Lipschitz linéaire pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1)**.**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(t_0, \alpha) \in I \times \mathbb{K}$. On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \\ y(t_0) = \alpha \end{cases} \quad \text{, avec } a, b : I \longrightarrow \mathbb{K} \text{ continues sur } I$$

Alors, en notant $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(u)\, du$, il existe une unique solution $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ du problème de Cauchy et celle-ci est définie par :

$$f : t \longmapsto e^{-A(t)}(\alpha e^{A(t_0)} + \int_{t_0}^{t} b(u) e^{A(u)}\, du)$$

► *On raisonne par analyse-synthèse et on utilise le facteur intégrant $e^{A(t)}$ pour faire apparaître la dérivée d'un produit.*

Remarque Bien entendu, il est inutile d'apprendre par coeur l'expression de cette solution, et nous reverrons plus tard comment retrouver la forme des solutions à partir de la structure de l'espace des solutions.

Exemple 2 On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(x) - 2xy(x) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer l'unique fonction f développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et solution de ce problème de Cauchy.
2. Justifier alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4^p p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}$$

Propriété 8 (structure des solutions)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère le système différentiel linéaire :

$$X'(t) + A(t)X(t) = B(t)$$

avec $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ qu'on suppose continues sur I. On note S l'ensemble des solutions du système différentiel et S_0 l'ensemble des solutions du système homogène associé. Alors,

1. S_0 est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et ainsi il existe des solutions du système homogène $X_1, \ldots, X_n$ linéairement indépendantes telles que :
$$S_0 = Vect(X_1, \ldots, X_n)$$
2. Si de plus Y_p désigne une solution particulière du système différentiel linéaire, alors :
$$S = \{Y_p + \lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$$
On peut alors écire $S = Y_p + S_0$ et on dit que S est un **espace affine** de direction S_0.

Et en adaptant encore les choses, le théorème de Cauchy-Lipschitz nous livre :

- **pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1** et en notant f_p une solution particulière :
$$dim(S_0) = 1 \text{ et ainsi, } S = f_p + S_0 \text{ avec } S_0 = Vect(f_1)$$
- **pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2** et en notant f_p une solution particulière :
$$dim(S_0) = 2 \text{ et ainsi, } S = f_p + S_0 \text{ avec } S_0 = Vect(f_1, f_2)$$

▶ *Pour le premier point, on revient à la caractérisation des sev puis on construit un isomorphisme de S_0 sur $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$. Pour le second point, on peut travailler par équivalence à partir de $X \in C^1(I, \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}))$.*

Remarques

1. La structure des solutions nous permet d'identifier la forme des solutions et on retiendra par exemple qu'elle donne :

$$(f, g) \in S^2 \Rightarrow f - g \in S_0$$

2. On retrouve également le principe de résolution qui a été présenté en première année : on commence par déterminer les solutions S_0 du système ou de l'équation homogène associée, puis on détermine une solution particulière du système ou de l'équation avec second membre. D'ailleurs, pour cela, on pourra procéder de plusieurs façons :
   - proposer une solution de la même forme que le second membre,
   - chercher une solution DSE par analyse-synthèse,
   - mettre en place la **méthode de variation des constantes**.

Exemple 3 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. On note $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle définie par :

$$(\mathcal{E}) \;\; ty'(t) + y(t) = \arctan(t)$$

   (a) Déterminer les solutions de $(\mathcal{E})$ sur les intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$.

   (b) Montrer alors qu'il existe une unique solution f de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2. On considère le système différentiel linéaire :

$$X'(t) = \begin{pmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} X(t)$$

   On note S_0 l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. Déterminer une base (X_1, X_2) de S_0.

2.2 Système fondamental de solutions et wronskien

Définition Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère le système différentiel linéaire :

$$X'(t) + A(t)X(t) = B(t)$$

avec $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ qu'on suppose continues sur I. On note encore S l'ensemble des solutions du système différentiel tel que $S = Y_p + S_0$.

- On appelle alors **système fondamental de solutions** toute base $(X_1, \ldots, X_n)$ de S_0 de sorte que $S_0 = Vect(X_1, \ldots, X_n)$.
- De plus, si $Z_1, \ldots, Z_n$ désignent d'autres solutions de S_0, on appelle **wronskien de cette famille** l'application :

$$W : t \in I \longmapsto \det(Z_1(t), \ldots, Z_n(t))$$

Propriété 9 (caractérisation d'un système fondamental de solutions à l'aide du wronskien)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère le système différentiel linéaire $X'(t) + A(t)X(t) = B(t)$, avec $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ qu'on suppose continues sur I, et on note $X_1, \ldots, X_n$ des solutions du système homogène associé. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de S_0
2. $\forall\, t \in I,\; W(t) \neq 0$
3. $\exists\, t_0 \in I,\; W(t_0) \neq 0$

▶ *On procède simplement par cycle et on pourra pour la première implication raisonner par l'absurde.*

Remarques

1. Le wronskien nous permettra donc de vérifier si des solutions de S_0 sont linéairement indépendantes. D'ailleurs, l'équivalence entre équation différentielle linéaire et système différentiel associé nous donne aussi :
   - **pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1** et en notant f_1 une solution de S_0 : f_1 est une base de S_0 si et seulement si $det(f_1) \neq 0 \Leftrightarrow f_1 \neq 0$.

- **pour les équations différentielles linéaires d'ordre 2** :et en notant f_1, f_2 des solutions de S_0 : (f_1, f_2) est une base de S_0 si et seulement si $(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_1' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_2 \\ f_2' \end{pmatrix})$ est une base du système homogène, c'est à dire que :

$$\forall t \in I, \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

2. En prenant les assertions contraires, on retrouve un résultat pratique : l'application W est nulle si et seulement s'il existe $t_0 \in I$, $W(t_0) = 0$.

Propriété 10 (forme intégrale du wronskien).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère le système différentiel linéaire $X'(t) + A(t)X(t) = B(t)$, avec $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ qu'on suppose continues sur I, et on note $X_1, \ldots, X_n$ des solutions du système homogène associé.
Alors, l'application W vérifie l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$y'(t) + tr(A(t))y(t) = 0$$

et ainsi, pour tout $t \in I$, $W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} tr(A(u))\,du}$ avec t_0 fixé dans I.

▶ *Seul le premier point est un peu délicat : on dérive le déterminant, puis on montre que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\phi : (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto det(Ax_1, \ldots, x_n) + \ldots + det(x_1, \ldots, Ax_n)$ est proportionnelle au déterminant. On aura alors une équation différentielle qu'il suffira de résoudre.*

Remarque Cette expression du wronskien n'est pas du tout au programme, mais elle vous permet de mieux comprendre la remarque précédente :

$$\exists\, t_0 \in I,\ W(t_0) = 0 \Rightarrow W = 0$$

3 Principe de résolution

3.1 Présentation de la méthode de variation des constantes

Propriété 11 (méthode de variation des constantes).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère le système différentiel linéaire $X'(t) + A(t)X(t) = B(t)$, avec $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ qu'on suppose continues sur I, et on note $(X_1, \ldots, X_n)$ un système fondamental de solutions de S_0.
De plus, on définit la fonction vectorielle $Y_p : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ par :

$$Y_p(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)X_i(t) \text{ avec } \lambda_i \in C^1(I, \mathbb{K})$$

Alors, Y_p est solution particulière du sytème différentiel linéaire si et seulement si pour tout $t \in I$,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(t)X_i(t) = B(t)$$

▶ *C'est immédiat : il suffit de vérifier à quelle condition Y_p, ainsi définie, est solution du système différentiel linéaire.*

Remarques

1. On a établi la structure des solutions de ces problèmes différentiels, et ainsi on a montré par exemple que :

$$S = Y_p + S_0$$

   Autrement dit, si on peut déterminer un système fondamental de solutions de S_0, on pourra toujours chercher une solution par la **méthode de variation des constantes** : celle-ci nous donnera un système d'équation en $\lambda_1', \ldots, \lambda_n'$ qu'il suffira de résoudre avant d'intégrer pour obtenir $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, et donc la solution particulière Y_p.

2. En fait, la matrice des coefficients associés est inversible, car son déterminant n'est rien d'autre que le wronskien du système fondamental $(X_1, \ldots, X_n)$.

3. On fera souvent appel aux **formules de Cramer** pour établir l'expression de $\lambda_1'(t), \ldots, \lambda_n'(t)$ par de simples calculs, d'autant que cela évitera de mettre en place des combinaisons maladroites.

3.2 Cas particulier des EDL d'ordre 1

Propriété 12 (résolution des EDL d'ordre 1)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et considérons l'équation différentielle linéaire $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$, avec a, b continues sur I.

1. En notant encore A une primitive de a sur I, alors f est solution de l'équation homogène si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f : t \longmapsto \lambda e^{-A(t)}$ de sorte que :
$$S_0 = Vect(f_1) \text{ avec } f_1 : t \longmapsto e^{-A(t)}$$
2. De plus, la fonction $f_p : t \longmapsto \lambda(t)f_1(t)$ est solution particulière de l'équation si et seulement si $\lambda'(t)f_1(t) = b(t)$.

▶ *Pour le premier point, on peut encore travailler par équivalence ou alors se contenter de vérifier que f_1 convient, avant d'utiliser la dimension. Pour le second point, il suffit d'injecter f_p dans l'équation.*

Remarque Le résultat nous donne des solutions à valeurs dans $\mathbb{K}$ suivant que l'on souhaite des solutions réelles ou complexes. Par exemple, si on ne cherche que des solutions à valeurs réelles, il suffira alors de restreindre l'ensemble des solutions à :
$$S_0 = Vect_{\mathbb{R}}(t \longmapsto e^{-A(t)})$$

Exemple 4 Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle $y'(t) + y(t)\tan(t) = \cos^2(t)$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

3.3 Cas particulier des EDL d'ordre 2 à coefficients constants

Propriété 13 (résolution des EDL d'ordre 2 à coefficients constants)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et considérons l'équation différentielle linéaire $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$, avec $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ et d continue sur I.

1. Alors, en notant Δ le discriminant de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$, il vient :
   - si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique possède deux solutions distinctes $(r_1, r_2) \in \mathbb{C}^2$, et dans ce cas :
   $$S_0 = Vect_{\mathbb{C}}(f_1, f_2) \text{ avec } f_1 : t \in I \longmapsto e^{r_1 t}, f_2 : t \in I \longmapsto e^{r_2 t}$$
   - si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une solution double $r_0 \in \mathbb{C}$, et dans ce cas :
   $$S_0 = Vect_{\mathbb{C}}(f_1, f_2) \text{ avec } f_1 : t \in I \longmapsto e^{r_0 t}, f_2 : t \in I \longmapsto te^{r_0 t}$$
2. De plus, on peut trouver une solution particulière de la forme $f_p : t \longmapsto \lambda_1(t)f_1(t) + \lambda_2(t)f_2(t)$ telle que :
$$\begin{cases} \lambda_1'(t)f_1(t) + \lambda_2'(t)f_2(t) = 0 \\ \lambda_1'(t)f_1'(t) + \lambda_2'(t)f_2'(t) = d(t)/a \end{cases}$$

▶ *Pour le premier point, on peut encore travailler par équivalence ou alors se contenter de vérifier que f_1 convient, avant d'utiliser la dimension. Pour le second point, on peut revenir à l'équivalence avec le système différentiel associé.*

Remarque On donne le résultat dans $\mathbb{C}$, mais dans le cas particulier où a, b, c sont réels, on peut évidemment affiner la forme des solutions de sorte que :

- si $\Delta > 0$, alors on pourra en extraire les solutions à valeurs réelles : $Vect_{\mathbb{R}}(t \longmapsto e^{r_1 t}, t \longmapsto e^{r_2 t})$.
- si $\Delta = 0$, alors on pourra en extraire les solutions à valeurs réelles : $Vect_{\mathbb{R}}(t \longmapsto e^{r_0 t}, t \longmapsto te^{r_0 t})$.
- si $\Delta < 0$, alors on a deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \overline{r_1}$ de sorte que :
$$S_0 = Vect_{\mathbb{C}}(t \longmapsto e^{\alpha t}e^{i\beta t}, t \longmapsto e^{\alpha t}e^{-i\beta t}) = Vect_{\mathbb{C}}(t \longmapsto e^{\alpha t}\cos(\beta t), t \longmapsto e^{\alpha t}\sin(\beta t))$$
  Et ainsi, on pourra encore en extraire les solutions à valeurs réelles :
$$S_0 = Vect_{\mathbb{R}}(t \longmapsto e^{\alpha t}\cos(\beta t), t \longmapsto e^{\alpha t}\sin(\beta t))$$

Exemple 5

1. Déterminer une primitive de $x \longmapsto \cos^4(x)$.
2. En déduire les solutions réelles de l'équation différentielle : $y''(x) + y(x) = \cos^3(x)$.

3.4 Cas particulier des systèmes différentiels à coefficients constants

Propriété 14 (expression de S_0 à l'aide de l'exponentielle).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère le système différentiel linéaire $X'(t) = AX(t) + B(t)$, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ qu'on suppose continue sur I. Alors, les solutions du système homogène sont données par :

$$X(t) = \exp(tA)X_0 \text{ avec } X_0 \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$$

▶ *On utilise la facteur intégrant et on pourra rappeler $t \longmapsto \exp(tA)$ est dérivable. Attention, il ne faudra pas oublier de justifier que $\exp(tA)$ est inversible avant d'exprimer $X(t)$.*

Remarque Si on développe le calcul précédent, alors on retrouve un système fondamental de solutions en les colonnes de $\exp(tA)$. Bien entendu, il faudra donc être capable de calculer une telle exponentielle avant d'en préciser les colonnes.

Exemple 6 On considère le système différentiel :

$$X'(t) = AX(t), \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A et en déduire que $N = A - 2I_3$ est nilpotente.
2. Calculer $\exp(tA)$, puis en déduire un système fondamental de solutions de S_0.

Propriété 15 (système fondamental de solutions dans le cas où A est diagonalisable).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère le système différentiel linéaire $X'(t) = AX(t) + B(t)$, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ qu'on suppose continue sur I. On suppose de plus que A est diagonalisable et on note $(V_1, \dots, V_n)$ une base de vecteurs propres associée aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
Alors, on peut définir un système fondamental de solutions :

$$X_1 : t \longmapsto e^{\lambda_1 t} V_1, \dots, X_n : t \longmapsto e^{\lambda_n t} V_n$$

▶ *Comme pour les équations différentielles, on vérifie que ces vecteurs conviennent avant d'invoquer la dimension de S_0.*

Remarques

1. A l'oral, c'est bien de savoir comment s'écrit un tel système fondamental de solutions, mais la plupart du temps, on nous demandera d'effectuer la réduction afin d'**obtenir un système différentiel équivalent par changement de variable** :
   - si A est diagonalisable, alors il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PDP^{-1}$, et ainsi :
     $$X'(t) = AX(t) + B(t) \Leftrightarrow X'(t) = PDP^{-1}X(t) + B(t) \Leftrightarrow (P^{-1}X)'(t) = D(P^{-1}X)(t) + P^{-1}B(t)$$
     En posant $Y(t) = P^{-1}X(t)$, cela équivaut à résoudre le système :
     $$Y'(t) = DY(t) + P^{-1}B(t)$$
     La matrice D étant diagonale, on obtient des équations différentielles plus faciles à résoudre.
   - si A est trigonalisable, alors il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PTP^{-1}$, et ainsi :
     $$X'(t) = AX(t) + B(t) \Leftrightarrow X'(t) = PTP^{-1}X(t) + B(t) \Leftrightarrow (P^{-1}X)'(t) = T(P^{-1}X)(t) + P^{-1}B(t)$$
     En posant $Y(t) = P^{-1}X(t)$, cela équivaut à résoudre le système :
     $$Y'(t) = TY(t) + P^{-1}B(t)$$
     La matrice T étant triangulaire, on obtient un système triangulaire d'équations différentielles plus faciles à résoudre.
2. Dans la méthode précédente, on pourra observer que si le système est homogène, alors le calcul de P^{-1} est inutile : en effet, une fois Y obtenu, on a directement $X = PY$.

Exemple 7 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier sans calcul que A est diagonalisable.
2. Déterminer les éléments propres de A, puis résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}.$$

x, y, z désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$.