Chapitre 11

Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien

On revient sur les espaces préhilbertiens, avec notamment la notion d'orthogonalité. Cela nous permet sous certaines conditions d'obtenir une décomposition naïve de l'espace, en fonction d'un sous-espace et de son supplémentaire orthogonal. On étudiera alors, dans le cas particulier des espaces euclidiens, les endormophismes symétriques et orthogonaux.

Programmes 2022

Pour aller plus loin

Ce chapitre est très pratique car il nous livre des théorèmes de réduction pour les endomorphismes remarquables, à commencer par les endomorphismes symétriques. On essaiera quand même de comprendre comment on construit les choses, des espaces préhilbertiens en dimension quelconque au cas particulier des espaces euclidiens.

1 Quelques rappels sur les espaces préhilbertiens

1.1 Retour sur les premières définitions et exemples fondamentaux

Définition Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on rappelle qu'un **produit scalaire** sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est à dire une application $\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in E^2,\ \phi(x,y) \in \mathbb{R} \\ \forall (x,x',y,y') \in E^4,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \phi(\lambda x + x', y) = \lambda\phi(x,y) + \phi(x',y) \text{ et } \phi(x, \lambda y + y') = \lambda\phi(x,y) + \phi(x,y') \\ \forall (x,y) \in E^2,\ \phi(y,x) = \phi(x,y) \ \text{ (symétrie classique)} \\ \forall x \in E,\ \phi(x,x) \geq 0 \text{ et } \phi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases}$$

  et dans ce cas, (E, ϕ) définit un **espace préhilbertien réel**.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on rappelle qu'un **produit scalaire** sur E est une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive, c'est à dire une application $\phi : E \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in E^2,\ \phi(x,y) \in \mathbb{C} \\ \forall (x,x',y,y') \in E^4,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{C},\ \phi(\lambda x + x', y) = \overline{\lambda}\phi(x,y) + \phi(x',y) \text{ et } \phi(x, \lambda y + y') = \lambda\phi(x,y) + \phi(x,y') \\ \forall (x,y) \in E^2,\ \phi(y,x) = \overline{\phi(x,y)} \ \text{ (symétrie hermitienne)} \\ \forall x \in E,\ \phi(x,x) \geq 0 \text{ et } \phi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases}$$

  et dans ce cas, (E, ϕ) définit un **espace préhilbertien complexe**.

On appelle alors **norme associée à ce produit scalaire** la norme notée $\|.\|_2 : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ et définie par :

$$\|x\|_2 = \sqrt{\phi(x,x)}$$

On parle plus précisément de **norme euclidienne associée** si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou de **norme hermitienne associée** si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition

- On appelle **espace euclidien** tout espace vectoriel réel de dimension finie et muni d'un produit scalaire.
- On appelle **espace hermitien** tout espace vectoriel complexe de dimension finie et muni d'un produit scalaire hermitien.

Remarques

1. En fonction des espaces considérés, il existe des produits scalaires plus ou moins usuels. Il ne faudra donc pas hésiter si besoin à introduire ces produits scalaires... surtout si on travaille sur $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $C^0([a,b], \mathbb{K})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ou encore sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ pour lequel on peut définir :

$$\phi : (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})^2 \longmapsto \overline{X}^T Y = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$$

2. On rappelle quand même que la norme associée à un produit scalaire est une norme, grâce aux propriétés du produit scalaire, mais aussi grâce à l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** qui nous permet d'obtenir l'inégalité triangulaire :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ |\phi(x,y)| \leq \|x\|_2.\|y\|_2$$

3. Au programme de MP, on fait alors le choix de ne travailler que dans des espaces préhilbertiens réels.

Exemple 1 On considère ℓ^2 l'ensemble des suites réelles de carré sommable, c'est à dire :

$$\ell^2 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^N,\ \sum u_n^2 \text{ converge}\}$$

1. (a) Etablir que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $ab \leq \dfrac{a^2 + b^2}{2}$.
   (b) Montrer alors que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. On note $\phi : (u,v) \in (\ell^2)^2 \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.
   Justifier que ϕ est bien définie sur $(\ell^2)^2$ et vérifier qu'elle définit un produit scalaire sur ℓ^2.

Remarque On essaiera de retenir cet exemple et de la même façon, on pourra considérer l'espace :

$$\mathcal{L}^{\in}(I, \mathbb{K}) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{K},\ \int_I |f|^2 \text{ converge}\}$$

Cela nous permet parfois d'ajouter un produit scalaire... A REDIGER UN PEU !

Propriété 1 (identités remarquables).

Soit (E, ϕ) un espace préhilbertien réel. Alors, la bilinéarité du produit scalaire nous donne :

1. $\forall\, (x,y) \in E^2,\ \begin{cases} \|x+y\|_2{}^2 = \|x\|_2{}^2 + 2\phi(x,y) + \|y\|_2{}^2 \\ \|x-y\|_2{}^2 = \|x\|_2{}^2 - 2\phi(x,y) + \|y\|_2{}^2 \end{cases}$

2. $\forall\, (x,y) \in E^2,\ \phi(x,y) = \dfrac{1}{4}(\|x+y\|_2{}^2 - \|x-y\|_2{}^2)$ (formule de polarisation)

3. $\forall\, (x,y) \in E^2,\ 2(\|x\|_2{}^2 + \|y\|_2{}^2) = \|x+y\|_2{}^2 + \|x-y\|_2{}^2$ (identité du parallélogramme)

▶ *Il suffit de revenir à la définition de la norme euclidienne et on fera appel aux propriétés du produit scalaire.*

Remarque Pour le reste du chapitre, on décide de simplifier les notations et on notera pour tout $(x,y) \in E^2$,

$$\phi(x,y) =< x, y >$$

1.2 Orthogonalité dans un espace préhilbertien réel

Définition Soit E un espace préhilbertien réel.

- On dit que deux vecteurs x et y appartenant à E sont **orthogonaux**, que l'on note $x \perp y$, si $< x, y >= 0$.
  Plus généralement, on dit que deux parties A et B de E sont **orthogonales**, que l'on note $A \perp B$, si pour tout $(a,b) \in A \times B$, $< a, b >= 0$.
- Considérons alors $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit aussi que :
  - la famille (x_i) est **orthogonale** si pour tout $(i,j) \in I^2, i \neq j,\ < x_i, x_j >= 0$.
  - la famille (x_i) est **orthonormée** ou **orthonormale** si pour tout $(i,j) \in I^2,\ < x_i, x_j >= \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j \\ 1, & \text{si } i = j \end{cases}$.

Théorème 2 (de Pythagore).

Soit E un espace préhilbertien réel et considérons $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille orthogonale de E. Alors, on a :

$$\|x_1 + \ldots + x_p\|_2^2 = \|x_1\|_2^2 + \ldots + \|x_p\|_2^2$$

▶ *C'est immédiat : il suffit d'utiliser la bilinéarité du produit scalaire.*

Propriété 3 (liberté et famille orthogonale).

Soit E un espace préhilbertien réel. Alors,

1. toute famille de vecteurs orthogonaux et non nuls est nécessairement libre.
2. toute famille de vecteurs orthonormés est nécessairement libre.

▶ *Le second point est un cas particulier du premier. Pour le premier point, on revient à l'étude de la liberté d'une sous-famille finie de vecteurs orthogonaux et non nuls.*

Théorème 4 (d'orthonormalisation de Gram-Schmidt).

Soit E un espace préhilbertien réel et considérons $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de E. Alors, il existe une unique famille orthonormale $(e'_1, \ldots, e'_p)$ telle que :

$$\begin{cases} \forall\, k \in [\![1,p]\!],\ Vect(e'_1, \ldots, e'_k) = Vect(e_1, \ldots, e_k) \\ \forall\, k \in [\![1,p]\!],\ < e'_k, e_k > > 0 \end{cases}$$

Cette famille orthonormale est alors appelée l'**orthonormalisée de Schmidt**.

▶ *On procède encore par récurrence sur p. Pour l'hérédité, on cherchera un nouveau vecteur e'_{p+1} combinaison linéaire de $e_{p+1}, e'_1, \ldots, e'_k$.*

Remarque Dans un espace de dimension finie, on peut donc toujours construire une base orthonormale, à condition de connaître au moins une base de l'espace. Concrètement, en notant (e_i) une base quelconque :

1. on pose $e'_1 = \frac{e_1}{||e_1||}$,
2. on construit alors $f_2 = e_2 - < e'_1, e_2 > .e'_1$, puis on pose $e'_2 = \frac{f_2}{||f_2||}$,
3. on construit alors $f_3 = e_3 - < e'_1, e_3 > .e'_1 - < e'_2, e_3 > .e'_2$, puis on pose $e'_3 = \frac{f_3}{||f_3||}$ ...

Et on itère ainsi le procédé jusqu'à obtenir la base orthonormée souhaitée.

Exemple 2 Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, on définit le produit scalaire usuel $< P, Q >= \sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k)$.
Montrer que la base canonique n'est pas orthonormale pour ce produit scalaire, puis construire l'orthonormalisée de Schmidt associée.

Corollaire 5 (deux conséquences du théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)**.**

1. Tout espace euclidien possède une base orthornomée.
2. Toute famille orthonormée d'un espace euclidien peut être compléte en une base orthonormée de l'espace.

Propriété 6 (expression du produit scalaire et de la norme dans un espace euclidien)**.**

Soit E un espace euclidien, c'est à dire un espace préhilbertien réel qu'on suppose de dimension finie $n \geq 1$. On note $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Alors,

1. $\forall\, x \in E,\ x = \sum_{i=1}^{n} < e_i, x > .e_i$
2. $\forall\, (x, y) \in E^2,\ < x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^T Y$ avec X, Y les matrices colonnes associées à x et y dans la base (e_i)
3. $\forall\, x \in E,\ \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{X^T X}$

▶ *A chaque fois, on décompose les vecteurs dans la base donnée : il suffit alors d'utiliser les propriétés du produit scalaire.*

Remarque On essaiera de retenir que travailler en base orthonormée est très pratique. Par exemple, on obtient les composantes d'un vecteur par simple produit scalaire sur les vecteurs de base... De cette façon, la matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormée B s'écrit alors :

$$Mat_B(u) = (< e_i, u(e_j) >)$$

2 Sous-espaces orthogonaux

2.1 Famille de sous-espaces orthogonaux et supplémentaire orthogonal

Définition Soit E un espace préhilbertien réel et considérons $F_1, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On dit qu'ils constituent une **famille de sous-espaces orthogonaux** si pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2, i \neq j$,

$$F_i \perp F_j$$

Propriété 7 (somme directe de sous-espaces orthogonaux)**.**

Soit E un espace préhilbertien réel et considérons $F_1, \ldots, F_p$ une famille de sous-espaces orthogonaux de E. Alors, on a :

$$F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$$

▶ *On revient à l'unique décomposition du 0_E et on peut appliquer le théorème de Pythagore.*

Définition Soit E un espace préhilbertien réel et considérons $F_1, \ldots, F_p$ une famille de sous-espaces orthogonaux de E. On dit encore que E se **décompose en somme directe orthogonale** si on a :

$$E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$$

et on pourra noter : $E = F_1 \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} F_p$.

Exemple 3 Dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques réelles. On munit E du produit scalaire canonique :

$$< A, B >= tr(A^T B)$$

1. Justifier rapidement que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Prouver alors que :
$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

Propriété 8 (sous-espace orthogonal à un sous-espace vectoriel)**.**

Soit E un espac epréhibertien réel et considérons F un sous-espace vectoriel de E.

1. Alors, l'ensemble $\{x \in E,\ \forall y \in F,\ x \perp y\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de E. Ce sous-espace est appelé l'**orthogonal de** F et on le note $F^\perp$.
2. En particulier, on a : $\{0\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0\}$.

► *Par équivalence, on montre que $x \in F^\perp \Leftrightarrow x \in \cap_{y\in F} Ker(< ., y >)$, intersection de sous-espaces fermés. Pour le second point, on procède par double inclusion : l'une est triviale, pour l'autre, il suffit de traduire l'orthogonalité.*

Définition Soit E un espace préhilbertien réel et considérons F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F admet un **supplémentaire orthogonal** si on a la décomposition :

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$$

Propriété 9 (dans le cas d'une décomposition à l'aide du supplémentaire orthogonal)**.**

Soit E un espace préhilbertien réel et considérons F un sous-espace vectoriel de E tel que :

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$$

Alors, $F^\perp$ admet à son tour un supplémentaire orthogonal, et on a $(F^\perp)^\perp = F$.

► *On a immédiatement $F \subset (F^\perp)^\perp$, et il faudra soigner l'autre inclusion en utilisant la décomposition en somme directe donnée.*

Remarques

1. Attention, ces résultats sont souvent mal interprétés : rien ne dit que le supplémentaire orthogonal existe dans un espace préhilbertien quelconque, et de la même façon, on n'a pas toujours $(F^\perp)^\perp = F$... Par contre, s'il existe, cette dernière égalité est vraie !
2. Et si $F = (F^\perp)^\perp$, alors on obtient en particulier que F est fermé dans E.

Exemple 4 Dans $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$, on définit le produit scalaire :

$$< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)\, dt$$

et on pose $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, et établir que $F^\perp = \{0\}$.
2. En déduire que $E \neq F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$ et que $F \neq (F^\perp)^\perp$.

2.2 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Théorème 10 (d'existence du supplémentaire orthogonal).

Soit E un espace préhilbertien réel et considérons F un sous-espace vectoriel de E. On suppose de plus que F est de dimension finie $p \geq 1$. Alors, il admet un supplémentaire orthogonal de sorte que :

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$$

▶ *F et $F^{\perp}$ sont toujours en somme directe. On se contente alors de montrer que $E = F + F^{\perp}$ par analyse-synthèse.*

Définition Soit E un espace préhilbertien réel et considérons F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $p \geq 1$.
En particulier, $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$ et ainsi :

$$\forall x \in E,\ \exists!(y, z) \in F \times F^{\perp},\ x = y + z$$

On appelle alors **projection orthogonale sur** F la projection p_F sur F parallèlement à $F^{\perp}$ et définie par $p_F(x) = y$.
De plus, $p_F(x)$ est appelé le **projeté orthogonal** de x sur F.

Remarque De façon immédiate, la projection orthogonale est un projecteur : on parle même de **projecteur orthogonal** et elle vérifie :

$$\begin{cases} p_F \in \mathcal{L}(E),\ p_F \circ p_F = p_F \\ Im(p_F) \perp Ker(p_F) \end{cases}$$

Propriété 11 (caractérisation du projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel de dimension finie).

Soit E un espace préhilbertien réel et considérons F un sous-espace vectoriel de E. On suppose de plus que F est de dimension finie $p \geq 1$ et notons $y \in F$. Alors,

$$y = p_F(x) \Leftrightarrow x - y \in F^{\perp}$$

▶ *C'est immédiat, puisqu'on a toujours : $x = y + (x - y)$.*

Propriété 12 (expression du projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel de dimension finie).

Soit E un espace préhilbertien réel et considérons F un sous-espace vectoriel de E. On suppose de plus que F est de dimension finie $p \geq 1$. Alors, en notant $B = (e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de F, on a pour tout $x \in E$,

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} < e_i, x > .e_i$$

▶ *On applique la caractérisation précédente de sorte que $x - y \in F^{\perp} \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ < x - y, e_i >= 0$.*

Remarques

1. Si E désigne un espace euclidien, alors tous les sous-espaces vectoriels sont de dimension finie. On peut donc toujours avoir une décomposition en somme directe orthogonale :

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$$

   et ainsi, en notant p_F et $p_{F^{\perp}}$ les projections associées, il vient encore : $id_E = p_F + p_{F^{\perp}}$.

2. On peut aller plus loin et en considérant F de dimension finie, on peut aussi définir la **symétrie orthogonale** par rapport à F et de direction $F^{\perp}$ de sorte que :

$$s_F = 2p_F - id_E : x \longmapsto 2y - (y + z) = y - z$$

   En particulier, elle vérifie :

$$\begin{cases} s_F \in \mathcal{L}(E),\ s_F \circ s_F = id_E \\ Ker(s_F - id_E) \perp Ker(s_F + id_E) \end{cases}$$

Définition Soit E un espace préhilbertien réel et considérons F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $p \geq 1$.
Sous réserve d'existence, on appelle **distance** de $x \in E$ à F le nombre :

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|_2$$

Théorème 13 (de minimisation).

Soit E un espace préhilbertien réel et considérons F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $p \geq 1$. Alors, la distance de x à F est atteinte en un unique point de F et on a :

$$d(x,F) = \|x - p_F(x)\|_2 = \sqrt{\|x\|_2{}^2 - \|p_F(x)\|_2{}^2}$$

► *Dans un premier temps, on vérifie que $\|x - p_F(x)\|_2$ est bien ce minimum, puis partant de $x = p_F(x) + x - p_F(x)$, on applique le théorème de Pythagore pour justifier la valeur obtenue. Enfin, il ne faudra pas oublier de prouver l'unicité annoncée !*

Exemple 5 Trouver trois réels (a, b, c) tels que :

$$\int_0^1 (\ln(t) - c - bt - at^2)^2 \, dt \text{ soit minimale.}$$

Théorème 14 (inégalité de Bessel).

Soit E un espace préhilbertien réel.

1. Si $(e_1, \dots, e_p)$ désigne une famille orthonormée de E, alors on a pour tout $x \in E$,

$$\sum_{i=1}^{p} < e_i, x >^2 \leq \|x\|_2{}^2$$

2. Si on suppose de plus que la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée totale, c'est à dire telle que $E = \overline{Vect((e_k)_{k\in\mathbb{N}})}$, alors en considérant $x \in E$, la série $\sum < e_k, x >^2$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} < e_k, x >^2 = \|x\|_2{}^2 \quad \text{(égalité de Parseval-Bessel)}$$

► *Pour le premier résultat, on rappellera la décomposition $x = p_F(x) + x - p_F(x)$. Pour le second, on procèdera en deux temps : on prouve d'abord la convergence avant d'essayer de contrôler la différence entre la limite et les sommes partielles.*

Remarque Cette dernière égalité n'est pas au programme de MP, mais elle est très pratique quand on la prolonge aux espaces préhilbertiens complexes. En particulier, si on se place dans l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques à valeurs complexes, et muni du produit scalaire :

$$< f, g > = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t) \, dt$$

Alors, on peut montrer que la famille $(e_n = t \longmapsto e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée totale sur E. La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{Z}} < e_n, f > .e_n$ est alors appelée **série de Fourier**, et d'après la preuve précédente, elle converge au sens de la norme $\|.\|_2$ et on peut réécrire l'**égalité de Parseval** :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt$$

avec $\forall k \in \mathbb{Z}$, $c_k(f) = < e_k, f > = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} \, dt$

En adaptant un peu le choses, on montre que cette formule est encore vraie pour des fonctions continues par morceaux, 2π-périodiques et régularisées aux points de discontinuité... Ainsi, en choisissant f la fonction 2π-périodique vérifiant pour tout $x \in]-\pi, \pi[$, $f(x) = x$, on retrouve directement l'égalité :

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

3 Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien

Pour finir, on se place dans E un espace euclidien de dimenion finie $n \geq 1$, et ainsi pour tout sous-espace vectoriel F :

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp} \Rightarrow \ dim(F^{\perp}) = n - dim(F)$$

3.1 Définition et propriétés de l'adjoint d'un endomorphisme

Théorème 15 (de représentation de Riesz)**.**

Soit E un espace euclidien, et considèrons ϕ une forme linéaire sur E. Alors, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \ \phi(x) = < x, a >$$

En particulier, l'application $f : a \longmapsto < ., a >$ désigne un isomorphisme de E sur E^*, et ainsi toute forme linaire peut être vu comme un produit scalaire relatif à un unique vecteur associé.

▶ *On introduit une base orthonormée de E et on procède par analyse-synthèse.*

Théorème 16 (existence et unicité de l'adjoint d'un endomorphisme)**.**

Soit E un espace euclidien et considérons $u \in \mathcal{L}(E)$, alors il existe un unique endomorphisme noté u^* tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ < u(x), y > = < x, u^*(y) >$$

Cet endomorphisme est alors appelé l'opérateur adjoint de u ou tout simplement l'**adjoint** de u.

▶ *On note à y fixé, $\phi_y : x \longmapsto < u(x), y >$ et on invoque le théorème de représentation de Riesz. Dans un deuxième temps, on prouve alors que $u^* : y \longmapsto a_y$ est bien un endomorphisme.*

Exemple 6 On se place dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qu'on munit du produit scalaire canonique :

$$< M, N > = tr(M^T N)$$

et on fixe $A \in E$.

1. On définit alors $f : X \longmapsto [A, X] = AX - XA$. Justifier que $f \in \mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer alors f^* l'adjoint de f.
3. On suppose de plus que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $f^* = f$.

Propriété 17 (de l'adjoint)**.**

Soit E un espace euclidien et considérons $u, v \in \mathcal{L}(E)$, alors :

1. pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda u + v)^* = \lambda u^* + v^*$.
2. $id_E^* = id_E$ et $(u^*)^* = u$
3. $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$

▶ *A chaque fois, il suffit de revenir à l'égalité via le produit scalaire, afin d'identifier les résultats.*

Corollaire 18 (de l'adjoint d'un automorphisme)**.**

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ qu'on suppose inversible, alors u^* est aussi inversible, et on a $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.

▶ *Partant de $u \circ u^{-1} = id_E$, il suffit de composer par $*$.*

Propriété 19 (matrice de l'ajoint en base orthonormée).

Soit E un espace euclidien et considérons $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors, en notant B une base orthonormée de E, on a toujours :

$$Mat_B(u^*) = Mat_B(u)^T$$

Et en particulier, le rang, la trace, le déterminant et le polynôme caractéristique étant des invariants de similitude :

$$rg(u^*) = rg(u),\ tr(u^*) = tr(u),\ det(u^*) = det(u) \text{ et } \chi_{u^*} = \chi_u \Leftrightarrow Sp(u^*) = Sp(u)$$

► *On revient à la définition de la matrice d'une telle application, et on rappellera que les composantes dans une telle base, s'obtiennent par simple produit scalaire sur les vecteurs de la base. La suite est immédiate par invariant de similitude.*

Remarque Encore une fois, on essaiera de comprendre que toutes ces propriétés nous permettent en fait de connaître l'opérateur adjoint, à partir du seul endomorphisme u.

Propriété 20 (noyau et image de l'adjoint).

Soit E un espace euclidien et considérons $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors, on a :

$$Ker(u^*) = Im(u)^{\perp} \text{ et } Im(u^*) = Ker(u)^{\perp}$$

► *Pour la première égalité, on peut raisonner par équivalence. Pour la seconde, on pourra proposer une inclusion et revenir à l'égalité des dimensions.*

Propriété 21 (stabilité de l'orthogonal par l'adjoint).

Soit E un espace euclidien et considérons $u \in \mathcal{L}(E)$, et F un sous-espace vectoriel de E. Alors, F est stable par u si et seulement si $F^{\perp}$ est stable par u^*.

► *On procède par double implication : pour le sens réciproque, on pourra invoquer le caractère involutif des opérations $*$ et $\perp$ en dimension finie.*

3.2 Cas particulier des endomorphismes symétriques

Définition Soit E un espace euclidien et considérons $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **autoadjoint** ou désigne un **endomorphisme symétrique** si $u^* = u$, c'est à dire que :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ < u(x), y >=< x, u(y) >$$

Exemple 7 Dans un espace euclidien E, on considère F un sous-espace vectoriel de sorte que $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$, et on définit p_F et s_F la projection orthogonale sur F et la symétrie orthogonale par rapport à F.

Montrer que p_F et s_F sont des endomorphismes symétriques, et ainsi $p_F^* = p_F$ et $s_f^* = s_F$.

Propriété 22 (caractérisation matricielle d'un endomorphisme symétrique).

Soit E un espace euclidien et considérons $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors, en notant B une base orthonormée de E, u est un endomorphisme symétrique si et seulement si :

$$Mat_B(u) = Mat_B(u)^T$$

c'est à dire que sa matrice en base orthonormée est symétrique réelle.

► *On peut travailler par équivalence en utilisant l'isomorphisme canonique $u \longmapsto Mat_B(u)$, avec la base B donnée.*

Corollaire 23 (espace vectoriel des endomorphismes symétriques)**.**

Soit E un espace euclidien et notons $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques sur E. Alors, $S(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, et on en déduit à l'aide de isomorphisme canonique à base orthonormée fixée $u \longmapsto Mat_B(u)$, que :

$$dim(S(E)) = dim(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Propriété 24 (immédiate des endomorphismes symétriques)**.**

Soit E un espace euclidien et considérons $u \in S(E)$. Alors,

1. l'endomorphisme induit u sur un sous-espace stable $F \subset E$ est toujours symétrique.
2. pour tout sous-espace stable F, alors $F^\perp$ est encore stable par u.

▶ *C'est immédiat. Le second point découle des propriétés de l'adjoint avec ici $u^* = u$.*

Propriété 25 (éléments propres d'un endomorphisme symétrique)**.**

Soit E un espace euclidien et considérons $u \in S(E)$. Alors,

1. le spectre de u est réel et ainsi, $Sp(u) \subset \mathbb{R}$.
2. u possède au moins une valeur propre réelle et ainsi, $1 \leq Card(S_p(u)) \leq n$.
3. en notant $E_u(\lambda_1), \dots, E_u(\lambda_p)$ les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes de u, alors ils sont deux à deux orthognaux, et ils sont donc toujours en somme directe.

▶ *Pour le premier point, on se plonge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on pourra travailler sur l'égalité $Mat_B(u)X = \lambda_i X$ après avoir fixé une base orthonormée de E. Le second point est immédiat et pour le dernier, on reviendra simplement à la définition de l'orthogonalité.*

Remarque Toutes ces propriétés sont importantes et on essaiera de s'en souvenir pour les oraux... ce sont des questions faciles pour l'examinateur, et en plus, ce sont ces propriétés qui nous livrent le théorème spectral !

Théorème 26 (spectral)**.**

Soit E un espace euclidien et considérons $u \in S(E)$. Alors, il existe une base de vecteurs propres orthonormés B dans laquelle $Mat_B(u)$ est diagonale. On dit que u est **orthodiagonalisable**.
Et ainsi, plus généralement, pour toute matrice symétrique réelle $S \in S_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$S = PDP^T \text{ avec } D \text{ une matrice diagonale à coefficients réels}$$

▶ *On note $F = F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$ de sorte que $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$. En raisonnant par l'absurde, on montre que $E = F$ et ainsi, on pourra choisir une base adaptée de vecteurs propres. Pour le second point, il suffit de considérer l'endomorphisme symétrique u canoniquement associée dans la base canonique.*

Remarques

1. Attention, ce résultat n'est vrai que pour les matrices symétriques réelles. Par exemple, on peut considérer la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{C})$$

qui est nilpotente, donc de spectre nul... Elle ne peut pas être diagonalisable, car elle serait égale à la matrice nulle.

2. Si on souhaite ortho-diagonaliser une matrice symétrique réelle, on procèdera de façon très classique, en cherchant d'abord une base de vecteurs propres, avant de l'orthonormaliser à l'aide du **principe d'orthonormalisation de Gram-Schmidt**.

3. Si A et B désignent deux matrices symétriques réelles telles que $AB = BA$, alors elles sont **co-orthodiagonalisables**. En effet, on peut adapter la preuve de la codiagonalisation et choisir une base de réduction commune qui sera orthonormée de sorte que :

$$\exists\, P \in O_n(\mathbb{R}),\ A = PD_1P^T \text{ et } B = PD_2P^T$$

Exemple 8 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que A est diagonalisable, puis déterminer une base orthonormale dans laquelle A est diagonale.
2. Calculer alors $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{A^k}{k!}$.

Définition Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.

- On dit enfin que A est **positive** si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T AX \geq 0$, et on note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles positives.
- On dit enfin que A est **définie positive** si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,
$$\begin{cases} X^T AX \geq 0 \quad \text{(positive)} \\ X^T AX = 0 \Rightarrow X = 0 \quad \text{(définie)} \end{cases}$$
et on note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives.

Propriété 27 (caractérisation des matrices symétriques positives et définies positives)**.**

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Alors, on a les caractérisations suivantes :

1. $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall\, \lambda \in Sp(A),\ \lambda \geq 0$
2. $A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall\, \lambda \in Sp(A),\ \lambda > 0$

► *A chaque fois, on raisonne par double implication : le sens direct est immédiat, car il suffit de présenter un vecteur propre associé. Pour le sens réciproque, on pourra évidemment invoquer le théorème spectral.*

Remarque Attention, on peut aussi adapter ces notions aux endomorphismes et ainsi, si $u \in \mathcal{S}(E)$ et B une base orthonormée, on dit encore que :

- u est **positif** si pour tout $x \in E$,
$$< u(x), x >\geq 0 \Leftrightarrow X^T Mat_B(u)X \geq 0$$
et on retiendra que u est positif $Mat_B(u) \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall\, \lambda \in Sp(u),\ \lambda \geq 0$.
- u est **défini positif** si pour tout $x \in E$,
$$\begin{cases} < u(x), x >\geq 0 \\ < u(x), x >= 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^T Mat_B(u)X \geq 0 \\ X^T Mat_B(u)X = 0 \Rightarrow X = 0 \end{cases}$$
et on retiendra que u est défini positif $Mat_B(u) \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall\, \lambda \in Sp(u),\ \lambda > 0$.

3.3 Cas particulier des automorphismes orthogonaux

Définition Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que M est dite **orthogonale** si M est inversible, et son inverse est $M^{-1} = M^T$. On appelle alors **groupe orthogonal** le groupe $(O_n(\mathbb{R}), \times)$ définie par :
$$O_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}),\ M^{-1} = M^T\}$$

Remarques

1. En particulier, si $M \in O_n(\mathbb{R})$, alors $M^T M = I_n$, c'est à dire qu'en notant $C_1, \ldots, C_n$ les vecteurs colonnes de M, on a pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,
$$[M^T M]_{ij} = \delta_{ij} \Leftrightarrow C_i^T C_j = \delta_{ij}$$
Autrement dit, $M \in O_n(\mathbb{R})$ si et seulement si les vecteurs colonnes constituent une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$. C'est même pour cela que dans le théorème spectral, la matrice de passage P est orthogonale de sorte que :
$$S = PDP^T \text{ avec } D \text{ une matrice diagonale à coefficients réels}$$
2. Si $M \in O_n(\mathbb{R})$, on a en particulier $det(M) = \pm 1$. On appelle alors **groupe spécial orthogonal** l'ensemble noté $SO_n(\mathbb{R})$ et défini par :
$$SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}),\ det(M) = 1\}$$

3. Bien entendu, on pourra vérifier que $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ portent bien leur nom : ainsi, si on revient à la caractérisation des sous-groupes, on montre qu'il s'agit là de deux sous-groupes multiplicatifs de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

Corollaire 28 ($O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont des parties compactes)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont des parties fermées et bornées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: elles sont donc compactes.

▶ *La remarque précédente nous donne à la fois le fait que c'est borné, puisque les vecteurs (C_i) sont unitaires et elles sont fermées, en tant qu'image réciproque par une application continue de $\{I_n\}$ ou de $\{1\}$.*

Définition Soit E un espace euclidien et considérons $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u désigne un **automorphisme orthogonal** si u est inversible et $u^* = u^{-1}$, c'est à dire que :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ < u(x), y >=< x, u^{-1}(y) >$$

et on peut encore noter $O(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux sur E.

Propriété 29 (caractérisation matricielle d'un automorphisme orthogonal)**.**

Soit E un espace euclidien et considérons $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors, en notant B une base orthonormée de E, u est un automorphisme orthogonal si et seulement si :

$$Mat_B(u^{-1}) = Mat_B(u)^T,\ \text{ce qui s'écrit encore } (Mat_B(u))^{-1} = Mat_B(u)^T$$

c'est à dire que sa matrice en base orthonormée est orthogonale.

▶ *On peut travailler par équivalence en utilisant l'isomorphisme canonique $u \longmapsto Mat_B(u)$, avec la base B donnée.*

Corollaire 30 (caractérisation d'un automorphisme orthogonal à l'aide de l'image d'une BON)**.**

Soit E un espace euclidien et considérons $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors, en notant B une base orthonormée de E, on en déduit que u est un automorphisme orthogonal si et seulement l'image de B par u est encore une base orthonormée de E.

Corollaire 31 (caractérisation d'un automorphisme orthogonal par conservation de la norme et du produit scalaire)**.**

Soit E un espace euclidien et considérons $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. u est un automorphisme orthogonal.
2. pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_2 = \|x\|_2$ et ainsi, u conserve la norme.
3. pour tout $(x,y) \in E^2$, $< u(x), u(y) >=< x, y >$ et ainsi, u conserve le produit scalaire.

On dit aussi que u est une **isométrie vectorielle**.

▶ *On procède par cycle et on n'hésitera pas à exploiter le résultat précédent pour prouver la dernière implication.*

Remarques

1. On fera attention au vocabulaire : si $p_F \neq \pm id_E$, alors la projection orthogonale n'est pas un automorphisme orthogonal. Par contre, la symétrie orthogonale s_F est bien un automorphisme orthogonal.

2. De plus, si u est une isométrie vectorielle, alors pour toute valeur propre $\lambda \in Sp(u)$ et en notant x un vecteur popre associé :
$$\|u(x)\|_2 = \|x\|_2 \ \Rightarrow |\lambda|\|x\|_2 = \|x\|_2 \Leftrightarrow |\lambda| = 1$$

3. En fonction des exercices, on pourra encore jouer sur la dualité entre $O(E)$ et $O_n(\mathbb{R})$ et ainsi, si $P \in O_n(\mathbb{R})$, alors P peut être vue comme la matrice d'une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^n$ dans la base canonique et :

   - les vecteurs colonnes désignent une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$,
   - on a toujours $\|PX\|_2 = \|X\|_2$.

Propriété 32 (immédiate des automorphismes orthogonaux)**.**

Soit E un espace euclidien et considérons u un automorphisme orthogonal de E. Alors,

1. l'endomorphisme induit u sur un sous-espace stable $F \subset E$ est toujours orthogonal.
2. pour tout sous-espace stable F, alors $F^\perp$ est encore stable par u.

► *C'est immédiat. Pour le second point, on peut encore utiliser les propriétés de l'adjoint avant de vérifier que $u(F^\perp) \subset F^\perp$.*

Remarque En fait, on distinguera ici les **automorphismes orthogonaux directs** de déterminant $+1$ et les **automorphismes orthogonaux indirects** de déterminant -1, et on essaiera de comprendre la nature de ces automorphismes en petite dimension, avant d'admettre leur réduction par blocs en dimension quelconque.

Propriété 33 (automorphismes orthogonaux en dimension 2)**.**

Soit u un automorphisme orthogonal du plan euclidien. Alors en notant B une base orthonormée, on a :
$M = Mat_B(u) \in O_2(\mathbb{R})$ et ainsi :

- $det(M) = 1 \Rightarrow$ il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}}_{R(\theta)}$.
- $det(M) = -1 \Rightarrow$ il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}}_{S(\theta)}$.

► *On traduit simplement l'appartenance au groupe orthogonal. On pourra alors discuter suivant la valeur du déterminant.*

Remarque En fait, dans le plan euclidien muni d'une base orthonormée directe, $R(\theta)$ représente la **rotation** d'angle θ $[2\pi]$, et $S(\theta)$ désigne une **réflexion**, c'est à dire une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Corollaire 34 (cas particulier des rotations du plan euclidien)**.**

On en déduit alors :

1. $SO_2(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif commutatif avec pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $R(\theta) \times R(\theta') = R(\theta + \theta') = R(\theta') \times R(\theta)$.
2. L'application $\phi : \theta \longmapsto R(\theta)$ est une application surjective de $\mathbb{R}$ vers $SO_2(\mathbb{R})$.

Propriété 35 (automorphismes orthogonaux en dimension 3)**.**

Soit u un automorphisme orthogonal de l'espace euclidien de dimension 3. Alors il existe une base orthonormée B et un réel θ tels que :

$$Mat_B(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

En particulier, le signe du déterminant nous permet d'identifier la dernière valeur.

► *Le polynôme caractéristique χ_u étant de degré 3, il existe au moins une valeur propre réelle $\lambda = \pm 1$. En notant e_3 un vecteur propre associé, on travaille alors sur $F = e_3^\perp$ de sorte que $u_F \in O_2(\mathbb{R})$.*

Remarque Dans le cas particulier où $u \in SO_3(\mathbb{R})$, alors il existe une base orthonormée dans laquelle :

$$Mat_B(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cela représente encore la rotation d'angle θ $[2\pi]$ et d'axe la droite invariante donnée par $Ker(u - id_E)$.

Théorème 36 (automorphismes orthogonaux en dimension quelconque)**.**

Soit u un automorphisme orthogonal de l'espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Alors, on admet qu'on peut généraliser le travail précédent et ainsi, il existe une base orthonormée B dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs avec :

- des blocs carrés de taille 1 de la forme (± 1)
- des blocs carrés de taille 2 de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, avec $\theta \neq 0\ [\pi]$.

4 Quelques applications classiques

4.1 Racine carrée d'un endomorphisme symétrique et positif

Exemple 9 Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme symétrique et positif de E.

1. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme g symétrique et positif tel que :
$$g^2 = f$$
2. En raisonnant par existence-unicité, on peut directement travailler avec les matrices et obtenir le même résultat :
$$\forall S \in S_n^+(\mathbb{R}),\ \exists ! R \in S_n^+(\mathbb{R}),\ R^2 = S$$
Cette matrice R est appelé **racine carrée** de S. Justifier alors que R désigne un polynôme en S.

4.2 Décomposition d'Iwasawa et inégalité d'Hadamard

Exemple 10 Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe un unique couple (O, T) tel que :
$$M = OT$$
avec $O \in O_n(\mathbb{R})$ et T une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.
Pour l'existence, on pourra noter u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M et étudier la famille $(u(e_i))$.
2. On note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de M. Etablir alors que :
$$|det(M)| \leq \|C_1\|_2 \ldots \|C_n\|_2$$

4.3 Décomposition polaire d'une matrice donnée et sous-groupes compacts de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$

Exemple 11

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M^T M$ est symétrique et à valeurs propres positives.
2. On suppose de plus que M est inversible. Montrer qu'il existe un unique couple $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que :
$$M = OS$$
3. Considérons G un sous-groupe compact de $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ contenant $O_n(\mathbb{R})$, et $A \in G$.
   (a) On note S la partie symétrique de A dans sa décomposition polaire. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $S^k \in G$.
   (b) Montrer que 1 est la seule valeur propre de S, puis établir que $G = O_n(\mathbb{R})$.

Autrement dit, au sens de l'inclusion, $O_n(\mathbb{R})$ désigne le plus grand sous-groupe compact de $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$: on dit aussi que $O_n(\mathbb{R})$ est un **sous-groupe compact maximal**.