Chapitre 1

Matrices d'une famille de vecteurs ou d'une application linéaire

Après avoir retravaillé quelques notions fondamentales d'algèbre linéaire, on revient sur les matrices et leur utilisation en algèbre, que ce soit pour étudier une famille de vecteurs ou une application linéaire. Leurs propriétés sont très nombreuses, et celles-ci nous permettront de mieux comprendre tout l'intérêt de la réduction des endomorphismes en dimension finie.

Programmes 2022

Pour aller plus loin

Ces premiers chapitres de révisions d'algèbre linéaire sont importants car ils nous préparent tout doucement aux chapitres fondamentaux de spé : celui sur la réduction des endomorphismes et celui sur les endormorphismes remarquables d'un espace euclidien. D'ailleurs, ces notions recouvrent presque tous les sujets de concours en algèbre... On essaiera donc de bien comprendre l'objectif sous-jacent : à partir d'une décomposition de l'espace bien choisie, on peut obtenir des tableaux numériques plus faciles à manipuler, et ainsi rendre plus facile la résolution de certains problèmes algébriques.

1 Matrices d'une famille de vecteurs ou d'une application linéaire

1.1 Rappel des premières définitions

Définition Soient n, p deux entiers ≥ 1. On appelle **matrice à n lignes et p colonnes** toute représentation de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1j} & \cdots & m_{1p} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{i1} & \cdots & m_{ij} & \cdots & m_{ip} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nj} & \cdots & m_{np} \end{pmatrix}$$

où pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, m_{ij} désigne le coefficient de la matrice d'indice (i, j).

On note encore $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$, ou plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes.

D'ailleurs, on rappelle que pour toutes matrices $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on peut définir les opérations suivantes :

$$\begin{cases} A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \\ \lambda.A = (\lambda.a_{ij}) \\ A \times B = (c_{ij}) \text{ où pour tout } (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \end{cases}$$

Propriété 1 (structure d'espace vectoriel)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, muni de ces opérations, on peut montrer que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, .)$ constitue une $\mathbb{K}$-**algèbre non commutative**, c'est à dire que :

- $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau non commutatif
- $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, .)$ est un espace vectoriel de dimension n^2 et dont on donne ici la **base canonique** :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\ E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\ \ldots,\ E_{nn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Remarques

1. Cette structure algébrique est commode car elle nous permet d'opérer facilement sur les matrices, par contre on ne négligera pas ses limites : elle est non commutative et on peut montrer qu'elle n'est pas intègre...

2. On fera aussi très attention avec les formules usuelles. On pourra en effet appliquer les formules du binôme de Newton et de factorisation, **à condition que les matrices en jeu commutent**.
Autrement dit, si $AB = BA$, alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} A^k B^{n-k} \text{ et } A^n - B^n = (A - B) \sum_{k=0}^{n-1} A^k B^{n-1-k}$$

3. Les matrices peuvent aussi être définies par blocs de la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, mais dans ce cas, on restera vigilant car les opérations sur les matrices par blocs seront licites dès lors que les tailles des blocs considérés seront compatibles.

Propriété 2 (produit et matrices élémentaires)**.**

Soient (E_{ij}) les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$E_{ij} \times E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}, \quad \text{où le symbole de Kronecker vérifie : } \delta_{jk} = \begin{cases} 1, \text{ si } j = k \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

► *Il suffit d'écrire le produit matriciel en respectant le produit ligne-colonne...*

Exemple 1 On note $C = \{A \in M_n(\mathbb{K}) |\ \forall M \in M_n(\mathbb{K}),\ AM = MA\}$ le centre de l'algèbre $M_n(\mathbb{K})$.
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $A \in C \Longleftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ AE_{ij} = E_{ij}A$.

2. En déduire que C est l'ensemble des matrices scalaires de la forme : $\lambda I_n,\ \lambda \in \mathbb{K}$.

Remarque Les matrices nous donnent ici une nouvelle structure algébrique, mais elles seront vraiment utiles en algèbre linéaire. En effet, ces tableaux et les opérations sous-jacentes nous donneront un moyen de modéliser rapidement tous nos problèmes sur les espaces vectoriels.

Définition Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ dont on note $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Si on considère des vecteurs $x_1, \dots, x_p \in E$, alors tous ces vecteurs se décomposent de façon unique de sorte que pour tout $j \in [\![1,p]\!]$:

$$x_j = x_{1j}e_1 + \ldots + x_{nj}e_n = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}e_i$$

On construit ainsi la matrice :

$$Mat_B(x_1, \dots, x_p) = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{i1} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{ip} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nj} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$$

On dit qu'il s'agit de la **matrice des vecteurs** (x_j) **suivant la base** B et on notera $X_1, \dots, X_p$ les vecteurs-colonnes de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ constitués des composantes des vecteurs $x_1, \dots, x_p$ dans la base B.

Propriété 3 (isomorphisme canonique)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ dont on note $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
L'application $\phi_B : (x_1, \dots, x_p) \in E^p \longmapsto Mat_B(x_j) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ désigne un isomorphisme d'espaces vectoriels.

► *C'est immédiat : comme $dim(E^p) = np = dim(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}))$, on se ramène à la caractérisation d'un isomorphisme en dimension finie.*

Remarque Cet isomorphisme nous permettra ainsi de voir n'importe quelle matrice comme la matrice d'une famille de vecteurs dans une base donnée.

Définition Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimensions finies et on note $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, $B' = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F. Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors on appelle **matrice de** f **suivant les bases** B **et** B' la matrice à n lignes et p colonnes constituée des composantes des vecteurs $f(e_j)$ dans la base B' :

$$Mat_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1j} & \cdots & m_{1p} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{i1} & \cdots & m_{ij} & \cdots & m_{ip} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nj} & \cdots & m_{np} \end{pmatrix}$$

avec pour tout $j \in [\![1,p]\!],\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{ij}f_i$.

Remarque Dans le cas particulier où $f = id_E$, alors on note $Mat_B(id_E)$ la matrice associée et on a :

$$Mat_B(id_E) = diag(1, \dots, 1) \text{ notée } I_p$$

Propriété 4 (isomorphisme canonique)**.**

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimensions finies. On note $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, $B' = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F.
L'application $\phi_{BB'} : f \in \mathcal{L}(E,F) \longmapsto Mat_{BB'}(f) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ désigne un isomorphisme d'espaces vectoriels.

► *C'est immédiat : comme $dim(E^p) = np = dim(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}))$, on se ramène à la caractérisation d'un isomorphisme en dimension finie.*

Remarques

1. Cet isomorphisme nous permettra ainsi de voir n'importe quelle matrice comme la matrice d'une application linéaire dans des bases données. On parlera généralement de l'**application linéaire canoniquement associée**.
2. En particulier, cet isomorphisme nous donne l'équivalence suivante : $Mat_{BB'}(f) = Mat_{BB'}(g) \Leftrightarrow f = g$.

Théorème 5 (interprétation algébrique du produit par un vecteur colonne)**.**

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimensions finies. On note $B = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E, $B' = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F.
Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors en notant $M = Mat_{BB'}(f)$, on a :

$y = f(x) \Leftrightarrow Y = MX$, avec X, Y les vecteurs-colonnes de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ constitués des composantes de $x \in E$ et $y \in F$.

► *On exprime simplement $f(x)$ dans les bases données et on fera attention au choix des indices de lignes et colonnes.*

Remarque Ce résultat est fondamental : il nous permet alors d'interpréter ces opérations matricielles comme des opérations sur les applications canoniquement associées et ainsi, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 6 (interprétation algébrique du produit de deux matrices)**.**

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies dont on note B, B' et B'' des bases de E, F et G.

1. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $Mat_{B'B''}(g) \times Mat_{BB'}(f) = Mat_{BB''}(g \circ f)$.
2. De la même façon, si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $[Mat_B(f)]^k = Mat_B(f^k)$.

1.2 Matrices inversibles et groupe linéaire d'ordre n

Définition Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **inversible** s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$AB = BA = I_n$$

La matrice B est alors appelée l'**inverse de** A et elle sera notée A^{-1}.

Propriété 7 (première caractérisation)**.**

Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et dont on note B une base. Si f désigne l'endomorphisme de E canoniquement associé à M, alors :

$$M \text{ est inversible } \Leftrightarrow f \in \mathcal{GL}(E)$$

Et dans ce cas, $M^{-1} = (Mat_B(f))^{-1} = Mat_B(f^{-1})$.

► *On procède par double implication ; pour la réciproque, on fera appel à l'isomorphisme canonique ϕ_{BB}.*

Corollaire 8 (autres caractérisations des matrices inversibles)**.**

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, M est inversible si et seulement si l'une des assertions suivantes est vérifiée :

1. les vecteurs-colonnes constituent une base de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$, ou à identification près de $\mathbb{K}^n$
2. M est inversible à gauche
3. M est inversible à droite

Remarque Pour inverser une matrice, il n'y a pas de méthode simple et on pourra toujours chercher à **inverser le système linéaire** donné par l'équivalence suivante :

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

Bien entendu, on gardera en tête le cas particulier des matrices carrées d'ordre 2 : si $ad - bc \neq 0$, alors la matrice associée est inversible et l'inverse est donnée par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Propriété 9 (groupe linéaire d'ordre n).

Notons $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n. Alors :

1. Si $A, B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $AB \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et on a : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe appelé **groupe linéaire d'ordre** n.

▶ *Le premier point est immédiat puisqu'on vérifiera l'inverse donné; pour le second, on reviendra à la définition d'un groupe multiplicatif.*

Exemple 2 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles on suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré ≥ 1 vérifiant :

$$P(0) = 1 \text{ et } AB = P(A)$$

Montrer que $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et que A et B commutent.

1.3 Trace et transposée d'une matrice

Définition Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée dont on note (m_{ij}) les coefficients. On appelle **trace de** M le scalaire noté $tr(M)$ défini par :

$$tr(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$$

Propriété 10 (de la trace).

1. L'application $tr : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto tr(M) \in \mathbb{K}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a : $tr(AB) = tr(BA)$.

▶ *Il suffit de revenir aux coefficients diagonaux...*

Exemple 3 On note $tr : M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$.

1. Déterminer une base de $Ker(tr)$.
2. En déduire que $Ker(tr) = Vect((AB - BA),\ (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2)$.
3. On considère ϕ une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et telle que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$,
$$\phi(AB) = \phi(BA)$$
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\phi = \lambda tr$.

Définition Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée dont on note (m_{ij}) les coefficients. On appelle **transposée de** M la matrice notée $M^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$M^T = (m'_{ij}) \text{ , avec pour tout } (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ m'_{ij} = m_{ji}$$

Remarque On retiendra qu'elle est simplement obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A. On pourrait de la même façon définir la transposée d'une matrice à n lignes et p colonnes...

Propriété 11 (de la transposée).

1. L'application $\phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto\ M^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un automorphisme involutif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a : $(AB)^T =\ B^T A^T$.
3. Si de plus, $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $A^T \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(A^T)^{-1} =\ (A^{-1})^T$.

▶ *Le premier point est immédiat en dimension finie ; pour le second, on reviendra aux coefficients du produit matriciel. Le dernier point s'obtient alors en transposant l'égalité $AA^{-1} = I_n$.*

Définition Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit alors :

- l'ensemble des **matrices symétriques** par :
$$S_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ M^T = M\} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ m_{ji} = m_{ij}\}$$
- l'ensemble des **matrices antisymétriques** par :
$$A_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ M^T = -M\} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ m_{ji} = -m_{ij}\}$$

Théorème 12 (décomposition de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimensions respectives $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dfrac{n(n-1)}{2}$ tels que :
$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$$

► *Pour le premier point, on essaie de les écrire sous forme de $Vect$. Il suffira alors de revenir à la caractérisation des sev supplémentaires en dimension finie.*

Remarques

1. Pour aller plus vite, on peut aussi rappeler que l'application $\phi : M \mapsto M^T$ est une symétrie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de sorte que :
$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Ker}(\phi - id) \oplus \mathrm{Ker}(\phi + id) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$$
2. Attention, la matrice d'une symétrie n'est pas nécessairement symétrique. Une matrice symétrique ne représente pas nécessairement une symétrie.

2 Cas particulier des changements de base

2.1 Matrices de passage

Définition Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie dont on note B et B' deux bases de E. On appelle **matrice de passage** de $B = (e_i)$ à $B' = (e'_i)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui décrit les nouveaux vecteurs dans la base B :
$$P_{BB'} = Mat_B(e'_i)$$

Remarques

1. Avec les notations de la définition, $P_{BB'}$ pourra aussi être vue comme la matrice de l'identité de (E, B') sur (E, B) :
$$P_{BB'} = Mat_B(e'_i) = Mat_{B'B}(id_E)$$
et il conviendra de choisir l'une ou l'autre de ces interprétations en fonction de l'exercice demandé.
2. On en déduit alors que $P_{BB'} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(P_{BB'})^{-1} = P_{B'B}$.

Théorème 13 (effets sur les composantes d'une vecteur)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie dont on note $B = (e_i)$ et $B' = (e'_i)$ deux bases de E. On considère $x \in E$ tel que :
$$x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \text{ et } x = x'_1e'_1 + \ldots + x'_ne'_n$$
Alors :
$$X = PX' \Leftrightarrow X' = P^{-1}X$$
où X, X' désignent les vecteurs-colonnes associés aux composantes de x dans les bases B et B', et $P = P_{BB'}$ associée au changement de bases.

► *On considère l'application id définie sur E à valeur dans E afin de traduire l'égalité $x = id(x)$.*

Théorème 14 (effets sur la matrice d'une application linéaire).

Soient E, F des $\mathbb{K}$-espace vectoriels de dimension finie dont on note B, D des bases de E, B', D' des bases de F, et on considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Si on note $M = Mat_{BB'}(f)$ et $M' = Mat_{DD'}(f)$, alors :
$$M = QM'P^{-1} \Leftrightarrow M' = Q^{-1}MP$$
avec les matrices de passage $P = P_{BD}$ et $Q = P_{B'D'}$, associées aux changements de bases dans E et F.

2. Et dans le cas particulier où f est un endomorphisme de E, on a :
$$M = PM'P^{-1} \Leftrightarrow M' = P^{-1}MP \text{ , avec } P = P_{BD} \text{ associée au changement de bases dans } E.$$

► *On se ramène à des diagrammes commutatifs pour pouvoir décomposer les applications de E dans F, et obtenir les égalités souhaitées.*

2.2 Relations d'équivalence et de similitude

Définition

- Soient $M, M' \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. On dit que M et M' sont **équivalentes** si M et M' représentent une même application linéaire dans des bases différentes, c'est à dire s'il existe $(P, Q) \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K}) \times \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que :
$$M = QM'P^{-1}$$
- Soient $M, M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que M et M' sont **semblables** si M et M' représentent un même endomorphisme dans des bases différentes, c'est à dire s'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que :
$$M = PM'P^{-1}$$

Remarque Ces relations binaires désignent des **relations d'équivalence**, au sens où elles sont **réflexives, symétriques et transitives**.

Théorème 15 (réduction d'une matrice de rang r).

Soit $M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. Si $rg(M) = r$, alors A est équivalente à la matrice J_r définie par :
$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

► *Tout découle du théorème du rang : on détermine une décomposition de E avant de construire des bases adaptées, tout en faisant attention de bien vérifier les hypothèses du théorème de la base incomplète.*

Corollaire 16 (caractérisation des matrices équivalentes).

Soient $M, M' \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.
$$M \text{ et } M' \text{ sont équivalentes } \Leftrightarrow rg(M) = rg(M')$$

► *Le premier fera appel à la conservation du rang par des isomorphismes; pour la réciproque, on exploitera la réduction d'une matrice de rang r.*

En effet, pour le sens réciproque, si deux matrices sont de même rang r, le théorème précédent nous livre l'existence de matrices de passage telles que :
$$M = QJ_rP^{-1} \text{ et } M' = RJ_rS^{-1}$$
En isolant J_r dans la seconde égalité, on peut alors écrire dans la première :
$$M = Q(R^{-1}M'S)P^{-1}$$
Par associativité, on reconnait deux matrices inversibles de sorte que $M = (QR^{-1})M'(SP^{-1})$ et ces matrices sont équivalentes au sens de la définition.

Remarques On ne confondra pas les notions de **matrices équivalentes** et **matrices semblables**.

1. Si deux matrices carrées sont semblables, alors elles sont nécessairement équivalentes mais la réciproque est fausse : par exemple, on pourra considérer la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Avec le rang, il est donc très facile de vérifier que deux matrices sont équivalentes. Par contre, pour montrer que deux matrices sont semblables, il faudra revenir à la définition et montrer qu'elles représentent un même endomorphisme dans des bases distinctes... et cela malgré la donnée de quelques invariants de similitude.

Propriété 17 (invariants de similitude)**.**

Soient $M, M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices qu'on suppose semblables. Alors,

1. $rg(M) = rg(M')$
2. $tr(M) = tr(M')$

On dit que ce sont des **invariants de similitude**, mais attention ils ne caractérisent pas la similitude des deux matrices.

▶ *C'est immédiat et cela découle des propriétés précédentes sur les matrices semblables et de la trace.*

Exemple 4 On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.3 Sous-espaces stables et premiers exemples de réduction

Définition Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit qu'un sous-espace vectoriel F est **stable** par f ou que f **stabilise** F si $f(F) \subset F$.

Propriété 18 (cas particulier d'un sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs)**.**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et considérons F un sous-espace vectoriel de E tel que $F = Vect((e_i)_{i \in I})$.
Alors, F est stable par f si et seulement si pour tout $i \in I$, $f(e_i) \in F$.

▶ *On procède par double implication : le sens direct est immédiat. Pour le sens réciproque, il suffit de revenir à une décomposition finie de $x \in F$ et d'invoquer la linéarité de f.*

Propriété 19 (endomorphismes qui commutent)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et considérons $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors, on a :

$$\begin{cases} Ker(f) \text{ et } Im(f) \text{ sont stables par } g \\ Ker(g) \text{ et } Im(g) \text{ sont stables par } f \end{cases}$$

▶ *On revient à la définition d'un sous-espace stable.*

Exemple 5 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et f un endomorphisme nilpotent non nul de E tel que :

$$f^{n-1} \neq 0 \text{ et } f^n = 0$$

1. Montrer que la suite des noyaux itérés $(Ker(f^k))_{0 \leq k \leq n}$ désigne une suite de sous-espaces stables par f et qui est strictement croissante au sens de l'inclusion de sorte que :

$$\{0_E\} \subset Ker(f) \subset Ker(f^2) \subset \ldots \subset Ker(f^n) = E$$

2. En déduire que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $dim(Ker(f^k)) = k$.

Définition Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel stable par $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **endomorphisme induit** par f l'endomorphisme noté $f_F \in \mathcal{L}(F)$ défini par :

$$f_F : x \longmapsto f(x)$$

Remaque Attention, c'est très subtil mais il faudra distinguer la restriction d'un endomorphisme f notée $f_{|F}$ définie par :

$$f_{|F} : x \in F \longmapsto f(x) \in E$$

et l'endomorphisme induit noté f_F qui, du fait de la stabilité de F, est bien définie sur F à valeurs dans F. Bien entendu, quand le sous-espace est stable, les deux notions coïncideront.

Théorème 20 (décomposition en somme directe de sous-espaces stables)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie tel que $E = \oplus_{i=1}^{p} F_i$ et notons $B = \cup_{i=1}^{p} B_i$ une base adaptée à cette décomposition. Alors, f stabilise chacun des sous-espaces F_i si et seulement si $Mat_B(f)$ est diagonale par blocs de la forme :

$$Mat_B(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

où pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, le bloc A_i est carré d'ordre $dim(F_i)$.
Et dans ce cas, on a immédiatement pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $A_i = Mat_{B_i}(f_{F_i})$.

► *On procède par double implication et la preuve est immédiate.*

Remarque Ce théorème est fondamental car il traduit l'enjeu du chapitre sur la **réduction des endomorphismes** : en effet, on cherchera à chaque fois à obtenir une décomposition de l'espace en somme directe de sous-espaces stables et pour lesquels les endomorphismes induits seront plus faciles à étudier... soit parce qu'on aura des homothéties, soit parce qu'on pourra exhiber des opérateurs nilpotents.

Corollaire 21 (cas particulier des projecteurs et des symétries)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et considérons f un projecteur de E et s une symétrie vectorielle de E. Alors, il existe des bases B et B' de E dans lesquelles on a :

$$Mat_B(f) = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{pmatrix} \text{ et } Mat_{B'}(s) = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & -I_{n-r} \end{pmatrix}$$

► *On revient aux décompositions sous-jacentes de l'espace E, et on construit une base adaptée à ces décompositions.*

Remarque Ce dernier résultat nous permet même d'affirmer que projecteurs et symétries sont **diagonalisables** : on a trouvé une base de réduction dans laquelle la matrice de ces endomorphismes est diagonale.

3 Déterminant d'une matrice carrée

3.1 Définition et premières propriétés

Définition Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et notons $(C_1, \dots, C_n)$ les vecteurs-colonnes qu'on choisit d'identifier à des vecteurs de $\mathbb{K}^n$ muni de sa base canonique (e_i).
On pose $f = det_{(e_i)}$ le déterminant dans la base canonique, on appelle alors **déterminant de la matrice** M le réel défini par :

$$det(M) = f(C_1, \dots, C_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) m_{\sigma(1)1} m_{\sigma(2)2} \dots m_{\sigma(n)n}$$

Propriété 22 (conséquences immédiates de la définition)**.**

Avec les notations de la définition, et le déterminant étant une forme n-linéaire alternée, on a immédiatement :

1. $det(I_n) = 1$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $det(C_1, \dots, \lambda.C_i, \dots, C_n) = \lambda.det(C_1, \dots, C_n)$
2. pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i < j$, $det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n) = -det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n)$
3. pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $det(C_1, \dots, C_i + \sum_{k \neq i} \lambda_k C_k, \dots, C_n) = det(C_1, \dots, C_n)$

Propriété 23 (calcul en petite dimension).

1. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, alors :
$$det(M) = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} = m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12}$$
2. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, alors la **méthode de Sarrus** nous permet d'obtenir le déterminant de la façon suivante :
$$det(M) = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix}$$

► *On revient à la définition et on cherchera à identifier S_n pour $n = 2$ ou $n = 3$.*

Remarque Cette méthode de Sarrus n'est pas la méthode la plus efficace : elle n'est valable que pour les matrices 3×3, et on verra bientôt d'autres règles de calcul plus rapides à mettre en oeuvre.

Propriété 24 (autres propriétés du déterminant).

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, on a :

1. $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$
2. $det(AB) = det(A).det(B) = det(BA)$.
3. $det(A^T) = det(A)$

► *Encore une fois, on reviendra aux propriétés du déterminant comme forme n-linéaire alternée sur $\mathbb{K}^n$... Pour le dernier point, on se ramènera à la définition explicite du déterminant en notant (a'_{ij}) les coefficients de A^T.*

En effet, pour ce dernier point, on a par définition :
$$det(A^T) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a'_{\sigma(1)1} \dots a'_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma^{-1}\circ\sigma(1)\sigma(1)} \dots a_{\sigma^{-1}\circ\sigma(n)\sigma(n)}$$
or l'ensemble des images $\sigma(k)$ recouvre les entiers 1 à n et ainsi, on peut réécrire quitte à permuter les termes :
$$det(A^T) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma^{-1}(1)1} \dots a_{\sigma^{-1}(n)n}$$
Enfin, quand σ parcourt S_n, il en est de même pour σ^{-1}, et ainsi avec $\epsilon(\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma)$:
$$det(A^T) = \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \epsilon(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1)1} \dots a_{\sigma^{-1}(n)n} = det(A)$$

Remarque Cette dernière propriété nous permet d'étendre les propriétés du déterminant sur les colonnes aux lignes de la matrice.

Théorème 25 (caractérisation des matrices inversibles à l'aide du déterminant).

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :
$$M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow det(M) \neq 0, \text{ et dans ce cas, } det(M^{-1}) = \frac{1}{det(M)}.$$

► *On procède par double-implication en rappelant que M est inversible si et seulement si les vecteurs colonnes désignent une base de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$, ou à identiffication près de $\mathbb{K}^n$. Pour le sens direct, il suffira d'utiliser la propriété précédente.*

Corollaire 26 (conséquences algébriques).

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et dont on donne (e_i) une base de E. Alors :

1. Une famille de vecteurs $(v_1, \dots, v_n)$ de E est une base $\Leftrightarrow$ $det(Mat_{(e_i)}(v_i)) \neq 0$.
2. Un endomorphisme f de E est bijectif $\Leftrightarrow$ $det(Mat_{(e_i)}(f)) \neq 0$.

Remarques

1. En fait, si A et B représentent un même endomorphisme dans des bases distinctes, alors on a :
$$det(A) = det(PBP^{-1}) = det(B)$$
Ainsi, on peut retenir que le déterminant de la matrice d'un endomorphisme ne dépend pas de la base choisie : c'est un **invariant de similitude** et on appellera donc **déterminant d'un endomorphisme** le déterminant de sa matrice dans n'importe quelle base de E.

2. Pour des matrices de taille quelconque, il n'est pas facile de calculer le déterminant. On cherchera souvent à mettre en place des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes, et ceci afin de se ramener à une matrice triangulaire : le calcul du déterminant revient alors au produit des coefficients diagonaux.

Propriété 27 (cas particulier du déterminant d'une matrice triangulaire ou diagonale).

Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si de plus M est triangulaire supérieure (ou diagonale), alors : $det(M) = \prod_{i=1}^{n} m_{ii}$.

▶ *On revient à la définition du déterminant et on discute les éléments σ décrivant la somme. Le second point est un cas particulier du premier.*

3.2 Formules de développement et applications

Définition Soient $n \geq 2$ et $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **cofacteur d'indice** (i,j) l'expression :
$$(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$$
où Δ_{ij} désigne le déterminant de la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ constituée des coefficients de M privée de sa i-ème ligne et de sa j-ème colonne.

Propriété 28 (lemme technique).

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :
$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n-1} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ m_{n1} & \dots & \dots & m_{nn-1} & m_{nn} \end{pmatrix}, \text{ alors } det(M) = m_{nn}\Delta_{nn}$$

▶ *On revient à la définition du déterminant et on discute les éléments σ décrivant la somme.*

Théorème 29 (formules de développement suivant une ligne ou une colonne).

Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On peut alors calculer le déterminant de M suivant...

- la j-ème colonne, c'est à dire qu'à j fixé : $det(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ij}.(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.
- la i-ème ligne, c'est à dire qu'à i fixé : $det(M) = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}.(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.

▶ *Pour le premier point, on développe le calcul du déterminant suivant la j-ème colonne et par linéarité, on essaie de se ramener à une matrice pour laquelle la dernière colonne est presque nulle.*

Exemple 6

1. Calculer les déterminants suivants : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $(n \geq 3)$, déterminer une relation de récurrence entre D_n, D_{n-1} et D_{n-2} avec:
$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ b & a & b & & 0 \\ 0 & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ 0 & & \dots & b & a \end{vmatrix}_{[n]}, \text{ puis déterminer } D_n \ (n \in \mathbb{N}^*) \text{ pour } (a,b) = (2,1).$$

Remarque Cette formule de développement admet plusieurs conséquences utiles : dans certains cas, elle nous permet d'obtenir certaines relations de récurrence dans le calcul de déterminant de taille n. D'autre part, elle nous permet aussi de prolonger le calcul de déterminant des matrices triangulaires ou diagonales aux matrices triangulaires ou diagonales par blocs... c'est très efficace !

Corollaire 30 (cas particulier du déterminant d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs).

Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qu'on suppose triangulaire par blocs (ou diagonale par blocs) de sorte que :

$$M = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1p} \\ 0 & A_{22} & \dots & A_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{pp} \end{pmatrix}$$

avec pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, A_{ii} des blocs carrés, alors on a encore :

$$det(M) = det(A_{11}).det(A_{22}).\dots det(A_{pp})$$

► *Cela repose en partie sur la formule du déterminant d'un produit, mais aussi sur le principe de développement suivant une ligne ou une colonne.*

Exemple 7 Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Montrer que le **déterminant de Vandermonde** défini par :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}_{[n]} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Définition Soient $n \geq 2$ et $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On appelle alors **comatrice de** M la matrice des cofacteurs définie par :

$$C(M) = ((-1)^{i+j} \Delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

Propriété 31 (expression de l'inverse à l'aide de la comatrice).

Avec les notations de la définitions, alors on a :

1. $M.C(M)^T = C(M)^T.M = det(M)I_n$
2. Si de plus, M est inversible, alors $M^{-1} = \dfrac{1}{det(M)} C(M)^T$.

► *Si le second point découle du premier, on montrera le premier résultat en se ramenant au coefficient du produit matriciel.*

Remarque Cette dernière propriété est intéressante pour des exercices formels... car malheureusement, la détermination pratique de l'inverse par la comatrice est assez lourde en calculs pour des matrices de dimension importante. On préfèrera donc inverser à la main un système de la forme $AX = B$ pour obtenir A^{-1}.

Propriété 32 (résolution d'un système de Cramer).

Soit (S) un système d'équations linéaires à n équations et n inconnues et notons $AX = Y$ la représentation matricielle associée. De plus, on suppose que (S) est un système de Cramer, c'est à dire que $det(A) \neq 0$.
Alors, il existe une unique solution $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ et en notant $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A, on a :

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!],\ x_k = \frac{1}{det(A)}\, det(C_1, \dots, C_{k-1}, Y, C_{k+1}, \dots, C_n)$$

► *L'existence et l'unicité résultent du déterminant non nul. Reste à déterminer la forme des solutions en partant du déterminant donné. On pourra introduire la base canonique de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ et utiliser la n-linéarité du déterminant.*