Chapitre 0

Espaces vectoriels et cas particulier de la dimension finie

Théorème du rang et applications

Pour aller plus loin
Ce chapitre est important car il nous prépare tout doucement aux chapitres fondamentaux de spé : celui sur la réduction des endomorphismes et celui sur les endormorphismes remarquables d'un espace euclidien. D'ailleurs, ces notions recouvrent presque tous les sujets de concours en algèbre... On essaiera donc de bien comprendre l'objectif sous-jacent : à partir d'une décomposition de l'espace bien choisie, on peut obtenir des tableaux numériques plus faciles à manipuler, et ainsi rendre plus facile la résolution de certains problèmes algébriques.

Définition Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$. On rappelle que f est un **morphisme d'espaces vectoriels** ou plus simplement une **application linéaire** si elle respecte les lois associées, c'est à dire si :

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, x, y \in E,\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

On note encore $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F, et en particulier,

- on rappelle que f est un **isomorphisme** s'il s'agit d'une application linéaire bijective.
- on rappelle que f est un **endomorphisme** s'il s'agit d'une application linéaire de E dans lui-même, c'est à dire $f \in \mathcal{L}(E)$.
- on rappelle que f est un **automorphisme** s'il s'agit d'un endomorphisme bijectif, c'est à dire $f \in \mathcal{GL}(E)$.

Théorème 1 (caractérisation de l'injectivité et la surjectivité d'une application linéaire)**.**

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors,

1. f est injective $\Leftrightarrow Ker(f) = \{0_E\}$
2. f est surjective $\Leftrightarrow Im(f) = F$

► *Seul le premier point mérite notre attention; il suffit en fait de procéder par double implication et on n'oubliera pas que f est ici une application linéaire.*

Propriété 2 (image d'une base par une application linéaire)**.**

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, en notant $(e_1, \ldots, e_n)$ une base quelconque de E :

1. $Im(f) = Vect(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.
2. f est bijective si et seulement si $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ constituent une base de F.

Et si ce dernier cas est vérifié, on en déduit que : $dim(E) = dim(F)$ et les espaces sont dits **isomorphes**.

► *Le premier point est immédiat, et pour le second, on procède par double implication.*

Théorème 3 (dimension de $\mathcal{L}(E, F)$)**.**

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors, $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie vérifiant :

$$dim(\mathcal{L}(E, F)) = dim(E) \times dim(F)$$

En pariculier, on a : $dim(\mathcal{L}(E)) = dim(\mathcal{L}(E, E)) = dim(E)^2$.

▶ *Pour une base (e_i), on construit $\phi : f \mapsto (f(e_1), \dots, f(e_n)) \in F^n$ et on montre qu'il s'agit d'un isomorphisme.*

En effet, la linéarité de ϕ est immédiate par opérations sur les n-uplets. De plus,

- *soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $\phi(f) = 0_{F^n} \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ f(e_i) = 0_F$, ce qui donne $f = 0$ et ainsi, ϕ est injective.*
- *considérons alors $(y_1, \dots, y_n) \in F^n$, on peut définir l'application linéaire f par $f : e_i \longmapsto y_i$, et par linéarité on obtient bien une application linéaire de E dans F. Par conséquent, $(y_1, \dots, y_n) = \phi(f)$ et ϕ est surjective.*

On en déduit que ϕ est un isomorphisme et par passage aux dimensions, $dim(\mathcal{L}(E,F)) = dim(F^n) = n.dim(F) = dim(E).dim(F)$.

Remarque En particulier, cet isomorphisme traduit le fait qu'une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base. Et ainsi, on pourra retenir que pour deux applications linéaires f et g :

$$f = g \Leftrightarrow \forall\, i \in [\![1,n]\!],\ f(e_i) = g(e_i)$$

Théorème 4 (du rang et formule du rang associée)**.**

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Si E est de dimension finie, alors tout supplémentaire de $Ker(f)$ est isomorphe à $Im(f)$ et dans ce cas, en notant $rg(f) = dim(Im(f))$, il vient :

$$dim(E) = dim(Ker(f)) + rg(f)$$

▶ *On note G un supplémentaire de $Ker(f)$ dans E et on construit $\phi : x \in G \mapsto f(x) \in Im(f)$ dont on montre qu'elle définit un isomorphisme de G sur $Im(f)$.*

Ce théorème fondamental est très pratique car étant donné des informations sur le noyau, on en déduit dans le cas d'espaces vectoriels de dimension finie, des informations sur l'image et réciproquement !

Exemple 1 Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère f l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$f : P \mapsto f(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer $Ker(f)$, puis en déduire $Im(f)$.

Propriété 5 (invariance du rang par composition avec un isomorphisme)**.**

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose de plus que g désigne un isomorphisme de F sur E. Alors, le rang est invariant quand on compose par g à gauche ou à droite, et ainsi :

1. $rg(g \circ f) = rg(f)$
2. $rg(f \circ g) = rg(f)$

▶ *Pour le premier point, on identifie les noyaux avant d'invoquer la formule du rang. Pour le second point, on pourra revenir au calcul de l'image à l'aide d'une base de E.*

Théorème 6 (caractérisation des isomorphismes en dimension finie)**.**

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose de plus que $dim(E) = dim(F)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est bijective de E sur F
2. f est inversible à gauche : $\exists\, g \in \mathcal{L}(F,E),\ g \circ f = id_E$
3. f est injective
4. f est inversible à droite : $\exists\, g \in \mathcal{L}(F,E),\ f \circ g = id_F$
5. f est surjective

▶ *On vérifiera que les deux cycles suivants sont bien équivalents : $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$ et $(1) \Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (5)$...*