Chapitre 0

Espaces vectoriels et cas particulier de la dimension finie

Décomposition en somme directe de sous-espaces vectoriels

Pour aller plus loin
Ce chapitre est important car il nous prépare tout doucement aux chapitres fondamentaux de spé : celui sur la réduction des endomorphismes et celui sur les endormorphismes remarquables d'un espace euclidien. D'ailleurs, ces notions recouvrent presque tous les sujets de concours en algèbre... On essaiera donc de bien comprendre l'objectif sous-jacent : à partir d'une décomposition de l'espace bien choisie, on peut obtenir des tableaux numériques plus faciles à manipuler, et ainsi rendre plus facile la résolution de certains problèmes algébriques.

Définition Soient $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On rappelle que la **somme des sous-espaces vectoriels** $F_1, \ldots, F_n$ désigne le sous-espace noté $F_1 + \ldots + F_n$ et défini par :

$$F_1 + \ldots + F_n = \{x_1 + \ldots + x_n,\ \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ x_i \in F_i\}$$

On dit alors qu'il s'agit d'une **somme directe** si tout vecteur de $F_1 + \ldots + F_n$ s'écrit de manière unique, c'est à dire si :

$$x_1 + \ldots + x_n = x'_1 + \ldots + x'_n \Rightarrow \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ x_i = x'_i$$

Et dans ce cas, on note $F_1 \oplus \ldots \oplus F_n$ la somme directe.

Propriété 1 (caractérisation d'une somme directe de n sous-espaces vectoriels)**.**

Soient $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors,

$$F_1 \oplus \ldots \oplus F_n \Leftrightarrow (x_1 + \ldots + x_n = 0_E \Rightarrow \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ x_i = 0_E)$$

Ce qui équivaut à dire que 0_E admet pour seule décomposition : $0_E = 0_E + \ldots + 0_E$. On parle de l'**unicité de la décompostion du** 0_E.

► *En travaillant par double implication, il suffit de revenir à la définition.*

En effet,

- *dans le sens direct, si toutes les décompositions dans $F_1 + \ldots + F_n$ sont uniques, celles du 0_E également.*
- *dans le sens réciproque, si on suppose que l'écriture du 0_E est unique et en considérant deux décompositions :*

$$x = x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \underbrace{x_i - y_i}_{\in F_i} = 0_E \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = y_i$$

Exemple 1 On se place dans $E = \mathbb{R}_3[X]$ et on définit :

$$F = Vect(1, X),\ G = \{P \in E, P(1) = P(-1) = 0\},\ H = Vect(X^3)$$

1. Montrer que F, G et H désignent des sev de E.
2. La somme $F + G + H$ est-elle directe ?

Définition Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que E se **décompose en somme directe** s'il existe $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que :

$$E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_n \Leftrightarrow \forall\, x \in E,\ \exists!(x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times \ldots \times F_n,\ x = x_1 + \ldots + x_n$$

Autrement dit, tout vecteur de E peut se décomposer de façon unique comme une somme de vecteurs appartenant à chacun de ces sous-espaces.

Corollaire 2 (caractérisation d'une décomposition en somme directe)**.**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E. Alors:

$$E = \oplus_{i=1}^n F_i \Leftrightarrow \begin{cases} E = F_1 + \ldots + F_n \\ (x_1 + \ldots + x_n = 0_E \Rightarrow \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ x_i = 0_E) \end{cases}$$

Théorème 3 (cas particulier d'une décomposition en somme directe de deux sous-espaces vectoriels)**.**

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors,

$$E = F \oplus G \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} F + G = E \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$$

On dit alors que F et G consituent des **sous-espaces vectoriels supplémentaires**.

▶ *On peut procèder par double implication en revenant par exemple à la définition d'une décomposition en somme directe.*

Exemple 2 On se place dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on note $P(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions paires définies sur $\mathbb{R}$, $I(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions impaires définies sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $P(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $I(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ constituent des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Définition Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels tels que :

$$E = \oplus_{i=1}^n F_i \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in E,\ \exists!\ (x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times \ldots \times F_n,\ x = x_1 + \ldots + x_n$$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on définit alors la **projection sur** F_i **parallèlement à** $\oplus_{j \neq i} F_j$ par :

$$p_i : x \in E \longmapsto x_i \in F_i$$

c'est à dire qu'à tout vecteur $x \in E$, p_i renvoie sa composante sur F_i.

Remarque De façon immédiate, toute projection relative à une décomposition de l'espace est un projecteur au sens où $p_i \circ p_i = p_i$. On pourra confondre les notions et parler de projecteurs associés à une décomposition.

Propriété 4 (projecteur et décomposition en somme directe)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et notons f un projecteur de E, c'est à dire :

$$\begin{cases} f \in \mathcal{L}(E) \\ f \circ f = f \end{cases}$$

Alors, on a la décomposition : $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.

▶ *Pour aller chercher cette décomposition, on peut revenir à la caractérisation précédente.*

Définition Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels tels que :

$$E = \oplus_{i=1}^n F_i \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in E,\ \exists!\ (x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times \ldots \times F_n,\ x = x_1 + \ldots + x_n$$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on définit alors la **symétrie par rapport** F_i **et de direction** $\oplus_{j \neq i} F_j$ par :

$$s_i : x \in E \longmapsto -x_1 - \ldots - x_{i-1} + x_i - x_{i+1} - \ldots - x_n$$

c'est à dire qu'à tout vecteur $x \in E$, s_i renvoie le vecteur dont les composantes ont été transformées en leurs opposées à l'exception de la composante sur F_i qui est restée invariante.

Remarque De façon immédiate, toute symétrie relative à une décomposition de l'espace est une symétrie vectorielle au sens où $s_i \circ s_i = id_E$. On pourra confondre les notions et parler de symétries associées à une décomposition.

Propriété 5 (symétrie et décomposition en somme directe)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et notons f une symétrie de E, c'est à dire :

$$\begin{cases} f \in \mathcal{L}(E) \\ f \circ f = id_E \end{cases}$$

Alors, $Ker(f - id_E)$ et $Ker(f + id_E)$ désignent deux sous-espaces vectoriels et on a la décomposition :

$$E = Ker(f - id_E) \oplus Ker(f + id_E)$$

► *Pour aller chercher cette décomposition, on peut revenir à la caractérisation précédente.*

Remarque Encore une fois, dans le cas particulier d'un espace vectoriel de dimension finie, il est plus facile de vérifier une telle décomposition :

Propriété 6 (caractérisation d'une décomposition en somme directe en dimension finie)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et notons $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. Alors,

$$E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p \Leftrightarrow \begin{cases} E = F_1 + \dots + F_p \\ dim(E) = \sum_{i=1}^p dim(F_i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 + \dots + x_p = 0_E \Rightarrow \forall\, i \in [\![1, p]\!],\ x_i = 0_E) \\ dim(E) = \sum_{i=1}^p dim(F_i) \end{cases}$$

Et dans ce cas, on construit naturellement une **base de E adaptée à cette décomposition** en concaténant des bases de chacun des sous-espaces F_i.

► *On procède par double implication : à chaque fois, on cherche à construire une base de $F_1 + \dots + F_p$ avant de conclure.*

Remarque Plus généralement, si on note B_i une base de F_i, alors on pourra retenir que $\cup_{i=1}^p B_i$, la concaténation des bases, nous donne a priori une famille génératrice de $F_1 + \dots + F_p$ et ainsi, on a toujours :

$$dim(F_1 + \dots + F_p) \leq \sum_{i=1}^p Card(B_i) = \sum_{i=1}^p dim(F_i)$$

et donc, il y a égalité si et seulement si la concaténation est une base de $F_1 + \dots + F_p$, c'est à dire lorsque tout vecteur de la somme se décompose de façon unique. Autrement dit, cela signifie qu'il y a égalité si et seulement si la somme est directe.

Corollaire 7 (formule de Grassmann)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie telle que $dim(E) = n$. On note F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors:

$$dim(F + G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)$$

► *Etant en dimension finie, on introduit F_1 et G_1 des supplémentaires de $F \cap G$ dans F et G, avant de montrer que : $F + G = F_1 \oplus F \cap G \oplus G_1$. Par passage aux dimensions, on en tirera la formule donnée.*

Pour cela, on revient à la caractérisation précédente :

$$F + G = F_1 \oplus F \cap G \oplus G_1 \Leftrightarrow \begin{cases} F + G = F_1 + F \cap G + G_1 \\ \text{décomposition unique du } 0_E \end{cases}$$

Le premier point est rapide : il suffit de vérifier qu'il y a bien une double inclusion.
Pour le second point, on considère une décomposition du 0_E de la forme :

$$0_E = x_{F_1} + x_{F\cap G} + x_{G_1} \quad (*)$$

En particulier, $x_{F_1} = -(x_{F\cap G} + x_{G_1})$ et donc, $x_{F_1} \in F$ mais aussi à $F \cap G$, d'où par somme directe de $F_1 \oplus F \cap G$, $x_{F_1} = 0_E$.
Dans ce cas, $(*) \Leftrightarrow 0_E = x_{F\cap G} + x_{G_1} \Leftrightarrow x_{G_1} = -x_{F\cap G}$, et donc ils appartiennent à $F \cap G$ et G_1, d'où par somme ddirecte, $x_{G_1} = x_{F\cap G} = 0_E$.
Finalement, on en déduit que $F + G = F_1 \oplus F \cap G \oplus G_1$ et par passage aux dimensions, on récupère la formule de Grassmann.

Corollaire 8 (cas particulier d'une décompostion en somme directe de deux sous-espaces vectoriels en dimension finie).

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie telle que $dim(E) = n$. On note F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors:

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow \begin{cases} E = F + G \\ dim(E) = dim(F) + dim(G) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ dim(E) = dim(F) + dim(G) \end{cases}$$

► *On utilisera à la fois la formule de Grassmann et les considérations sur la dimension d'un sous-espace vectoriel.*

Exemple 3 Dans $E = \mathbb{R}_n[X]$ $(n \geq 3)$, on définit F par :

$$F = \{P \in E,\ P(0) = P'(0) = P''(0) = 0\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer alors que $E = \mathbb{R}_2[X] \oplus F$.