Chapitre 0

Espaces vectoriels et cas particulier de la dimension finie

Notion de bases d'un espace vectoriel

Pour aller plus loin
Ce chapitre est important car il nous prépare tout doucement aux chapitres fondamentaux de spé : celui sur la réduction des endomorphismes et celui sur les endormorphismes remarquables d'un espace euclidien. D'ailleurs, ces notions recouvrent presque tous les sujets de concours en algèbre... On essaiera donc de bien comprendre l'objectif sous-jacent : à partir d'une décomposition de l'espace bien choisie, on peut obtenir des tableaux numériques plus faciles à manipuler, et ainsi rendre plus facile la résolution de certains problèmes algébriques.

$\mathbb{K}$ désigne encore un sous-corps de $\mathbb{C}$: $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ lui-même.

Définition Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille finie de vecteurs de E.

- On rappelle que les vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ sont **linéairement indépendants** ou désignent une **famille libre** si :

$$\forall\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

- On rappelle que les vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ sont **linéairement dépendants** ou désignent une **famille liée** s'ils ne sont pas libres, c'est à dire :

$$\exists\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0 \text{ avec } (\lambda_i) \text{ non tous nuls}$$

- On rappelle que les vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ sont **générateurs** ou désignent une **famille génératrice** si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de ces vecteurs, c'est à dire :

$$\forall\, x \in E,\ \exists\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n \quad \text{ou encore} \quad E = Vect(x_1, \ldots, x_n)$$

Propriété 1 (caractérisation d'une famille liée).

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors :

$$(x_1, \ldots, x_n) \text{ sont liés} \Leftrightarrow \text{ l'un de ses vecteurs peut s'écrire comme combinaison des autres}$$

▶ *On procède simplement par double implication.*

En effet,

- *si la famille est liée, il existe des scalaires non tous nuls tels que :*

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0_E$$

et si on note i_0 l'indice tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$, alors $x_{i_0} = -(1/\lambda_{i_0}) \sum_{i \in [\![1,n]\!] - \{i_0\}} \lambda_i x_i$.

- *réciproquement, si l'un d'entre eux s'écrit en fonction des autres. On a par exemple :*

$$x_{i_0} = \sum_{i \in [\![1,n]\!] - \{i_0\}} \lambda_i x_i \Leftrightarrow \lambda_1 x_1 + \ldots + \underset{\neq 0}{(-1)} x_{i_0} + \ldots + \lambda_n x_n = 0_E$$

et donc, la famille est liée.

Remarques

1. Une famille constituée d'un seul vecteur $x \in E$ est donc libre si et seulement si ce vecteur est non nul. De la même façon, une famille constituée de deux vecteurs (x_1, x_2) est libre si et seulement si ces vecteurs ne sont pas colinéaires.

2. On fera attention à bien comprendre cette définition : si des vecteurs sont libres, on ne peut pas dire qu'il existe une combinaison linéaire nulle... mais s'il en existe une, les scalaires n'ont pas d'autres choix que d'être tous nuls !

3. Dans le cas particulier où la famille de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ est infinie, on adapte ces définitions et ainsi :

- une telle famille est **libre** si toute sous-famille **finie** de vecteurs est libre.
- une telle famille est **liée** s'il existe une sous-famille **finie** de vecteurs qui est liée.
- une telle famille est **génératrice** si tout vecteur de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire **finie** de ces vecteurs.

Définition Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille finie de vecteurs de E. On dit que les vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ constituent une **base** de E si tout vecteur de E peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire de ces vecteurs, c'est à dire :

$$\forall\, x \in E,\ \exists!\ (\lambda_i) \in \mathbb{K}^n,\ x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$$

Et dans ce cas, les scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ assurant la décomposition sont appelés les **coordonnées de x dans la base** (x_i).

Propriété 2 (caractérisation d'une base vue comme une famille libre et génératrice).

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille finie de vecteurs de E. Alors :

$$(x_i) \text{ est une base } \Leftrightarrow (x_1, \ldots, x_n) \text{ constituent une famille libre et génératrice de } E$$

► *On procède par double implication en revenant aux définitions des familles liées et libres.*

En effet,

- *si la famille (x_i) est une base, alors tout vecteur de E se décompose en fonction de ces vecteurs et donc, elle est génératrice. Reste à montrer qu'elle est libre. Pour cela, on considère $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \text{ mais on a aussi : } 0x_1 + \ldots + 0x_n = 0_E$$

  Par unicité de la décomposition, on en déduit que pour tout i, $\lambda_i = 0$ et la famille est libre.

- *si la famille est libre et génératrice, alors elle est génératrice et tout vecteur $x \in E$ se décompose en fonction de ces vecteurs. Reste à montrer que la décomposition est unique. Pour cela, on considère deux décompositions :*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$$

  Alors, par différence : $\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i - \mu_i)x_i = 0_E$ et la famille étant libre, pour tout i, $\lambda_i - \mu_i = 0 \Rightarrow \lambda_I = \mu_i$.

Théorème 3 (de la base extraite).

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit au vecteur nul. On suppose que E admet une famille génératrice finie de sorte que $E = Vect(e_1, \ldots, e_n)$.
Alors, il existe une sous-famille $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p})$ libre de cardinal maximal, et ces vecteurs constituent une base de E.

► *On considère l'ensemble $A = \{Card(\mathcal{L}),\ \mathcal{L} \text{ est une sous-famille de } (e_i) \text{ libre}\}$ puis on fera appel aux axiomes de $\mathbb{N}$.*

Théorème 4 (de la base incomplète).

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit au vecteur nul. On suppose que E admet une famille génératrice finie de sorte que $E = Vect(e_1, \ldots, e_n)$ et on note $(f_1, \ldots, f_p)$ une famille libre quelconque de E.
Alors, il existe une sur-famille $(f_1, \ldots, f_p, f_{p+1}, \ldots, f_n)$ génératrice de cardinal minimal, et ces vecteurs constituent une base de E.

► *On considère l'ensemble $\{Card(\mathcal{G}),\ \mathcal{G} \text{ est une sur-famille de } (f_i) \text{ génératrice}\}$, puis on fera appel aux axiomes de $\mathbb{N}$.*

En effet, cet ensemble est non vide car par exemple, la réunion $(f_1, \ldots, f_p) \cup (e_1, \ldots, e_n)$ désigne une sur-famille de (f_i) génératrice dans E. Ainsi, A désigne une partie de $\mathbb{N}$ non vide : d'après les axiomes de $\mathbb{N}$, il existe $\mathcal{G}$ une sur-famille $(f_1, \ldots, f_p, f_{p+1}, \ldots, f_n)$ de cardinal minimal et génératrice dans E. Reste à montrer que cette famille est aussi libre pour avoir une base.
Pour cela, on considère des scalaires (λ_i) tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0_E \quad (*)$$

De plus, s'il existe $i_0 \in [\![p+1, n]\!]$ tel que $\lambda_i \neq 0$, alors la famille est liée et donc, on aurait par exemple $(f_i)_{i \neq i_0}$ une sur-famille de $(f_1, \ldots, f_p)$ consituée de $n-1$ vecteurs et génératrice de E : ce n'est pas possible car on a exhibé une famille de cardinal minimal n. Ainsi, pour tout $i \in [\![p+1, n]\!]$, $\lambda_i = 0$ et donc :

$$(*) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i = 0_E$$

mais ces vecteurs étant libres par hypothèse, il vient aussi : $\lambda_i = 0$. D'où, la liberté de $(f_1, \ldots, f_p, f_{p+1}, \ldots, f_n)$.
Finalement, on a bien construit une base de E à partir des vecteurs indépendants $f_1, \ldots, f_p$.

Remarque Ces deux théorèmes nous donnent l'existence d'une base, mais on fera attention :

- le premier nous permet d'éliminer des vecteurs générateurs afin de construire concrètement une base : on cherche en fait à en extraire une **famille libre maximale**.
- le second nous donne l'existence d'une base, comme **famille génératrice minimale** mais elle ne nous permet pas de l'obtenir de façon concrète.

Propriété 5 (lemme pratique et définition de la dimension)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit au vecteur nul et notons note $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors, on peut montrer que toute famille de p vecteurs, $p > n$, est nécessairement liée.
On en déduit que toutes les bases de E possèdent le même nombre de vecteurs : c'est la **dimension** de E notée $dim(E)$.

► *On montre d'abord par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $n+1$ vecteurs sont nécessairement liés. Avec $p > n$, on aura donc une sur-famille d'une famille liée...*

En effet, par récurrence, on vérifie :

- *si on considère deux vecteurs s'exprimant à partir d'un seul vecteur de base, alors on a par exemple :*

  $$u_1 = \lambda_1 e_1 \text{ et } u_2 = \lambda_2 e_1$$

  ou bien u_2 est nul, et la famille (u_1, u_2) est liée, ou bien $u_2 \neq 0$ et donc, $\lambda_2 \neq 0$ ce qui entraîne que $u_1 = (\lambda_1/\lambda_2)u_2$, et la famille est toujours liée.

- *soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons le résultat vrai au rang n et considérons une famille de $n+2$ vecteurs pouvant s'exprimer à partir de $n+1$ vecteurs :*

  $$\begin{cases} u_1 = \lambda_{1,1}e_1 + \ldots + \lambda_{1,n+1}e_{n+1} \\ \\ u_{n+1} = \lambda_{n+1,1}e_1 + \ldots + \lambda_{n+1,n+1}e_{n+1} \\ u_{n+2} = \lambda_{n+2,1}e_1 + \ldots + \lambda_{n+2,n+1}e_{n+1} \end{cases}$$

  On va raisonner par disjonction des cas.
  $*$ si pour tout $i \in [\![1, n+2]\!]$, $\lambda_{i,n+1} = 0$, alors les $n+1$ premières lignes nous donnent une famille de $n+1$ vecteurs qui ne s'expriment qu'à partir de n vecteurs et par hypothèse, $(u_1, \ldots, u_{n+1})$ est liée. La sur-famille $(u_1, \ldots, u_{n+1}, u_{n+2})$ est alors liée.
  $*$ s'il existe un scalaire $\lambda_{i,n+1} \neq 0$, par exemple on peut supposer $\lambda_{n+2,n+1} \neq 0$, alors on construit une nouvelle famille de vecteurs par opérations sur les lignes. Ainsi, on pose :

  $$y_1 = u_1 - (\lambda_{1,n+1}/\lambda_{n+2,n+1})u_{n+2}, \ldots, \text{ et } y_{n+1} = u_{n+1} - (\lambda_{n+1,n+1}/\lambda_{n+2,n+1})u_{n+2}$$

  Dans ce cas, $y_1, \ldots, y_{n+1}$ ne s'expriment qu'à partir des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ et par hypothèse, ils sont nécessairement liés. On en déduit qu'il existe des scalaire snon tou snuls $(\mu_i$ tels que :

  $$\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i y_i = 0_E$$

  En remplaçant les vecteurs y_i par leur expression, on exhibe une combinaison linéaire de vecteurs u_i non tous nuls et la famille est liée. Ce qui livre l'hérédité.

Par le principe de récurrence, toute famille de $n+1$ vecteurs s'exprimant à partir de n vecteurs sont liés. Si $p > n$, alors la sur-famille $(u_1, \ldots, u_p)$ serait forcément liée. On en déduit qu'une base de E ne peut, ici et avec nos hypothèses, ne contenir que n vecteurs.

Remarques

1. Par convention, si E est réduit au vecteur nul, on posera : $dim(E) = 0$.
2. On pourra quand même retenir que la dimension joue un rôle important, car elle nous donnera à chaque fois un moyen efficace d'obtenir des propriétés algébriques. Par exemple, on a les caractérisations suivantes :

Corollaire 6 (caractérisation des bases parmi les familles libres).

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie telle que $dim(E) = n$. Alors :

1. toute famille libre comporte au plus n vecteurs ;
2. une famille libre est une base si et seulement si elle contient exactement n vecteurs.

► *Le premier point est donné par le lemme pratique; le second sera démontré par double-implication.*

Corollaire 7 (caractérisation des bases parmi les familles génératrices).

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie telle que $dim(E) = n$. Alors :

1. toute famille génératrice comporte au moins n vecteurs ;
2. une famille génératrice est une base si et seulement si elle contient exactement n vecteurs.

► *Le premier point est donné par le lemme pratique; le second sera démontré par double-implication.*

Exemple 1 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et f un endomorphisme nilpotent non nul de E. On note p le plus petit entier non nul tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer qu'il existe $x \neq 0$ tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre.
2. En déduire que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Propriété 8 (cas particulier du produit cartésien).

Soient E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie telle que $dim(E) = n$, $dim(F) = p$. Alors, on a :

$$dim(E \times F) = dim(E) + dim(F)$$

► *Il suffit de vérifier que* $(e_1, 0), \ldots, (e_n, 0), (0, f_1), \ldots, (0, f_p)$ *désignent une base de* $E \times F$.